

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER. HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

Band 18 — Seite 263 bis 318

Heft 5 — Oktober 1938

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE:

DOLAPTSCHIEW, Störungsbewegungen (Bahnen) der einzelnen Wirbel der Kármánschen Wirbelstraße / WEINHOLD, Über die Kipp-Stabilität der Holme im Rippenverband / GUDERLEY, Eigenschwingungen in brennenden Gasgemischen

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Englisch-französische Titelerläuterungen der in Band XVIII, Heft 5 der „ZAMM“ (1938) veröffentlichten Hauptaufsätze.

Bl. Dolaptschiew in Sofia.

On the disturbed motions of the vortices of a Kármán street. The paper continues a previous one by the same author published in ZAMM 17 (1937) Nr. 6 under the title “On the stability of Kármán's vortex street“. For “alternating“ disturbances of second order the stable and unstable trajectories of the vortices are calculated and illustrated by diagrams.

Sur les mouvements perturbés des tourbillons d'une file de Kármán. Cette Note fait suite à celle du même auteur parue dans ZAMM 17 (1937) No. 6 sous le titre „Sur la stabilité des files tourbillonnaires de Kármán“. Pour le cas des perturbations „alternées“ du second ordre l'auteur calcule les trajectoires stables et instables des tourbillons et en trace des figures.

J. Weinhold in Brünn.

On the stiffness against torsion of the spars in a lattice consisting of two spars and ribs. A lattice of this kind may buckle by torsion of the spars about their axes while those axes remain in the plane of the lattice („Kippen“, see also a paper by the author in ZAMM 17 (1937) No. 5). The two spars being subjected to uniform pressures and uniform, equal or opposite twisting moments, the resistance against buckling is calculated under simplifying assumptions (narrow spars, ribs infinitely dense), four kinds of supports of the spars (boundary conditions) being taken into account. The simplifications are admissible because they lead to a lower bound of the buckling stress.

Sur la rigidité en torsion des longerons dans un treillis composé de deux longerons et de nervures. Un treillis de cette espèce peut être flambé par suite d'une torsion des longerons autour de leurs axes, ces axes eux-mêmes restant dans le plan du treillis („Kippen“, voir aussi la Note de l'auteur dans ZAMM 17 (1937) No. 5). Si les deux longerons sont sollicités par des pressions uniformes et des moments de torsion uniformes égaux ou opposés, on peut calculer les efforts critiques correspondant à quatre systèmes d'appuis des longerons (conditions aux limites), en admettant certaines simplifications (longerons à section très effilée, nervures infiniment denses). Ces simplifications sont admissibles parce qu'elles conduisent à des limites inférieures des efforts critiques.

G. Guderley in Braunschweig.

Characteristic oscillations in burning gas mixtures. The author considers the motions of a slowly burning gas contained in a closed cylindrical vessel, under the hypothesis that periodical variations of the pressure at the inflammation point will cause periodical variations, with the same period, of the velocity of combustion. By means of Hamilton's principle he obtains the motion as a superposition of characteristic oscillations, and calculates it in a first approximation. The results explain the fact that the amplitudes of the pressures corresponding to characteristic oscillations may increase rapidly.

Sur les oscillations propres d'un mélange de gaz brûlant. L'auteur considère les mouvements d'un gaz qui brûle lentement dans un récipient cylindrique fermé. Il se fonde sur l'hypothèse que des variations périodiques de la pression au point d'inflammation entraînent des variations périodiques, et de période égale, de la vitesse de combustion. Partant du principe d'Hamilton il représente le mouvement par une superposition d'oscillations propres et le calcule en première approximation. La théorie explique le fait que les amplitudes des pressions correspondant aux oscillations propres peuvent croître rapidement.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 18 | Oktober 1938 | Heft 5

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. Bl. Dolaptschiew: Störungsbewegungen (Bahnen) der einzelnen Wirbel der Kármánschen Wirbelstraße 263
J. Weinhold: Über die Kipp-Stabilität der Holme im Rippenverband 272
G. Guderley: Eigenschwingungen in brennenden Gasgemischen 285
Kleine Mitteilungen. W. Mangler, A. Walz: Zur numerischen Auswertung des Poissonschen Integrals 309
R. Sauer: Zur optischen Abbildung von Strahlensystemen 312
Buchbesprechungen. Vogelpohl VDI: Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. — Bachmann: Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. — Raub, Marks, Bündgens und Otto: Kardanbewegung und Koppelbewegung, ein einfaches Verfahren zur Klärung der Bewegungsverhältnisse und zum schnellen und sicheren Entwurf von Koppelkurven-Getrieben. — Hailer: Gleiskrümmung und Fliehkraft auf Eisenbahnbrücken, eine Anleitung zur Berechnung dieser Einflüsse auf die stählernen Eisenbahnbrücken unter Beachtung der Vorschriften der Deutschen Reichsbahn. — Kirchhoff: Die Statik der Bauwerke. — Budnick: Zeichnerische Behandlung von Kräften und Momenten in Koppel- und Rädertrieben. — Feldtkeller: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. — Joos und Kaluza: Höhere Mathematik für den Praktiker. — Rothe: Differentialgeometrie. — Menninger: Rechenkniffe. — Weiter eingegangene Bücher 313
Nachrichten 317

HAUPTAUFSÄTZE

Störungsbewegungen (Bahnen) der einzelnen Wirbel der Kármánschen Wirbelstraße.

Von *Bl. Dolaptschiew* in Sofia.

Der vorliegende Aufsatz ist der zweite Teil einer Untersuchung[1]), deren ersten Teil ich in dieser Zeitschrift (Bd. 17, Heft 6, 1937) unter dem Titel „Über die Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße" veröffentlicht habe. Jetzt handelt es sich um die genaue Berechnung und Konstruktion der stabilen und instabilen Bahnkurven, welche die einzelnen Wirbelpunkte einer gestörten Kármánstraße beschreiben. Da ich einerseits den Einfluß auf die Ergebnisse zeige, wenn noch quadratische Störungen berücksichtigt werden, und andererseits die Zerstörung der Wirbelstraße verfolge, falls die Anordnung nicht genau die Kármánsche ist ($h/l \neq 0{,}281$), so kann diese Betrachtung, sozusagen, als ein mathematisches Experiment gelten. Durch die nachfolgenden theoretischen Untersuchungen glaube ich in das Verhalten der Wirbelkonfigurationen etwas tiefer einzudringen.

1. Bewegungsgesetze bei Störungen zweiter Ordnung. In Gl. (I, 11) hatten wir die Bewegungsgesetze der Wirbel bei Störungen erster Ordnung. Es blieb uns noch übrig die Auflösung des Systems (I, 6′) für die Summen der Unbekannten anzugeben. Derivieren wir die erste Gleichung dieses Systems einmal nach t und beachten wir die Bezeichnungen (I, 14), so erhalten wir, nach gewissen Umformungen,

$$\ddot{x}_0' + \ddot{x}_1' = C_1 \{(a^2 - \beta^2)[(x_0' - x_1')^2 - (x_0'' - x_1'')^2 + (y_0' - y_1')^2 - (y_0'' - y_1'')^2] \\ - 4\,a\,\beta\,[(x_0' - x_1')(y_0'' - y_1'') - (x_0'' - x_1'')(y_0' - y_1')]\} = \ddot{x}_0'' + \ddot{x}_1''.$$

Diese Gleichung geht, für den in (I, Abb. 4) gegebenen speziellen Fall, wo

$$C_1 = \bar{x}_0' + \bar{x}_1' - (\bar{x}_0'' + \bar{x}_1'') = 0, \qquad C_2 = \bar{y}_0' + \bar{y}_1' - (\bar{y}_0'' + \bar{y}_1'') = -2\,r$$

ist, in die einfache Gleichung

$$\ddot{x}_0' + \ddot{x}_1' = 0 = \ddot{x}_0'' + \ddot{x}_1''$$

über, oder

$$\dot{x}_0' + \dot{x}_1' = C = \dot{x}_0'' + \dot{x}_1''.$$

Da die Integrationskonstante C ein und dieselbe ist, wie man aus der ersten Gl. (I, 6′) sieht, so folgt für $t = 0$

$$C = -2\,r\,(\lambda + a\,r + 2\,\beta\,r).$$

[1]) Weiterhin bezeichne ich sie kurz (I).

Eine nochmalige Integration gibt uns

$$x_0' + x_1' = C\,t + D', \qquad x_0'' + x_1'' = C\,t + D'',$$

oder, wegen $D' = 0 = D''$ für $t = 0$, schließlich

$$x_0' + x_1' = -2\,r\,(\lambda + a\,r + 2\,\beta\,r)\,t = x_0'' + x_1'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1\,\text{a}).$$

Jetzt bleibt uns die Auflösung der zweiten Gleichung des Systems (I, 6′) übrig, die, wegen $C_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \dot y_0' + \dot y_1' = & -a\,[(x_0' - x_1')\,(y_0' - y_1') + (x_0'' - x_1'')\,(y_0'' - y_1'')] \\ & -\beta\,[(x_0' - x_1')\,(x_0'' - x_1'') - (y_0' - y_1')\,(y_0'' - y_1'')] = \dot y_0'' + \dot y_1'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

lautet. Diese Gleichung enthält lauter Differenzen der Unbekannten. Diese Differenzen gewinnen wir, indem wir das System (I, 7″) endgültig auflösen. Das betreffende System ist aber, wegen der Annahme $C_1 = 0$, genau das System (I, 7′), wenn nur in diesem anstatt μ, ν die Koeffizienten τ, σ auftreten. Das letztere System führte zu der Lösung (I, 10), oder

$$\left.\begin{aligned} x_0' - x_1' &= e^{\tau t}\,(a' \cos\sigma t + b'' \sin\sigma t) + e^{-\tau t}\,(b' \cos\sigma t + a'' \sin\sigma t) \\ y_0' - y_1' &= e^{\tau t}\,(a' \cos\sigma t + b'' \sin\sigma t) - e^{-\tau t}\,(b' \cos\sigma t + a'' \sin\sigma t) \\ x_0'' - x_1'' &= e^{\tau t}\,(b'' \cos\sigma t - a' \sin\sigma t) + e^{-\tau t}\,(a'' \cos\sigma t - b' \sin\sigma t) \\ y_0'' - y_1'' &= -e^{\tau t}\,(b'' \cos\sigma t - a' \sin\sigma t) + e^{-\tau t}\,(a'' \cos\sigma t - b' \sin\sigma t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Wenn wir nun (3) in (2) einsetzen und umformen, bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} \dot y_0' + \dot y_1' = & -e^{2\tau t} \cos 2\sigma t\,[a\,(a'^2 - b''^2) + 2\,\beta\,a'\,b''] \\ & + e^{-2\tau t} \cos 2\sigma t\,[2\,\beta\,b'\,a'' - a\,(a''^2 - b'^2)] \\ & - e^{2\tau t} \sin 2\sigma t\,[2\,a\,a'\,b'' - \beta\,(a'^2 - b''^2)] \\ & + e^{-2\tau t} \sin 2\sigma t\,[2\,a\,b'\,a'' - \beta\,(a''^2 - b'^2)] = \dot y_0'' + \dot y_1'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2').$$

Hier kommen Integrale nur von der Form

$$I_c^{\pm} = \int e^{\pm 2\tau t} \cos 2\sigma t\,d\,t, \qquad I_s^{\pm} = \int e^{\pm 2\tau t} \sin 2\sigma t\,d\,t$$

vor, deren Ausrechnung

$$I_c^{\pm} = \frac{1}{\tau^2 + \sigma^2}\,(\pm\,\tau\,e^{\pm 2\tau t} \cos 2\sigma t + \sigma\,e^{\pm 2\tau t} \sin 2\sigma t),$$

$$I_s^{\pm} = \frac{1}{\tau^2 + \sigma^2}\,(\pm\,\tau\,e^{\pm 2\tau t} \sin 2\sigma t - \sigma\,e^{\pm 2\tau t} \cos 2\sigma t)$$

gibt.

Die Lösung für die Summen der Ordinaten ist folglich

$$\left.\begin{aligned} y_0' + y_1' = \frac{2}{\tau^2 + \sigma^2}\,\{ & [a\,(b''^2 - a'^2) - 2\,\beta\,a'\,b'']\,e^{2\tau t}\,(\tau \cos 2\sigma t + \sigma \sin 2\sigma t) + \\ & [a\,(b'^2 - a''^2) + 2\,\beta\,a''\,b']\,e^{-2\tau t}\,(-\tau \cos 2\sigma t + \sigma \sin 2\sigma t) + \\ & [\beta\,(a'^2 - b''^2) - 2\,a\,a'\,b'']\,e^{2\tau t}\,(\tau \sin 2\sigma t - \sigma \cos 2\sigma t) - \\ & [\beta\,(b'^2 - a''^2) + 2\,a\,a''\,b']\,e^{-2\tau t}\,(\tau \sin 2\sigma t + \sigma \cos 2\sigma t)\} + C = y_0'' + y_1'' \end{aligned}\right\} (2'').$$

Der in (I, Abb. 4) gegebene Fall gibt für die Koeffizienten a, b

$$a' = b' = a'' = r, \qquad b'' = -r.$$

Dann ergibt sich bei $t = 0$, für die Konstante der Wert:

für die obere Reihe

$$C = C_1' = \frac{8\,a\,\sigma\,r^2}{\tau^2 + \sigma^2},$$

für die untere Reihe

$$C = C_1'' = \frac{8\,a\,\sigma\,r^2}{\tau^2 + \sigma^2} + 2\,r.$$

Damit erhalten wir aus den obigen Gleichungen statt (2″)

$$\left.\begin{aligned} y_0' + y_1' = \frac{8\,r^2}{\tau^2 + \sigma^2}\,[& \beta\,(\tau \cos 2\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,2\tau t + \sigma \sin 2\sigma t\,\mathfrak{Cos}\,2\tau t) + \\ & a\,(\tau \sin 2\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,2\tau t - \sigma \cos 2\sigma t\,\mathfrak{Cos}\,2\tau t) + a\,\sigma] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\text{a}''),$$

$$y_0'' + y_1'' = \frac{8\,r^2}{\tau^2+\sigma^2}[\cdots\cdot] + 2\,r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{b}'').$$

Mit den oben angegebenen Werten der a und b werden die Gl. (3)

$$\left.\begin{aligned} x_0' - x_1' &= 2\,r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t - \sin\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t)\\ y_0' - y_1' &= 2\,r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t - \sin\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t)\\ x_0'' - x_1'' &= -2\,r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t + \sin\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t)\\ y_0'' - y_1'' &= 2\,r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t + \sin\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3').$$

Durch Addition und Subtraktion der entsprechenden Gl. (1a, 2a'', 2b'') und (3') erhalten wir die gesuchten Bewegungsgesetze des betrachteten Wirbelquadrupels[2]):

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} x_0'(t) = r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t - \sin\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t) - r(\lambda + a\,r + 2\,\beta\,r)\,t\\ y_0'(t) = r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t - \sin\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t) + \dfrac{4\,r^2}{\tau^2+\sigma^2}[\beta(\tau\cos 2\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,2\tau t + \sigma\sin 2\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,2\tau t)\\ \qquad\qquad + a(\tau\sin 2\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,2\tau t - \sigma\cos 2\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,2\tau t) + a\sigma] \end{cases}\\ &\begin{cases} x_0''(t) = -r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t + \sin\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t) - r(\lambda + a\,r + 2\,\beta\,r)\,t\\ y_0''(t) = r(\cos\sigma t\,\mathfrak{Cof}\,\tau t + \sin\sigma t\,\mathfrak{Sin}\,\tau t) + \dfrac{4\,r^2}{\tau^2+\sigma^2}[\cdots\cdot] + r \end{cases} \begin{cases} x_1'(t) = \cdots,\\ y_1'(t) = \cdots, \end{cases} \begin{cases} x_1''(t) = \cdots\\ y_1''(t) = \cdots \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

2. Bahnkurve der Stabilität. Wie wir schon in (I) sahen, kommt die Kármánsche Stabilität immer zutage, wenn die Anfangsstörungen erster Art sind. Dann ist $C_2 = 0$ und, dem Fall in (I, Abb. 4) entsprechend, wo die untere Reihe mit der punktierten Linie gezeichnet ist, haben wir

$$r = \overline{x}_0' = -\overline{x}_1', \quad \overline{y}_0' = 0 = \overline{y}_1'; \qquad \overline{x}_0'' = 0 = \overline{x}_1'', \quad r = \overline{y}_0'' = -\overline{y}_1''.$$

Nehmen wir von hier ab $l = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \sim 1{,}11$ an, so folgt leicht, daß $\mu^2 + \nu^2 = 1$. Dividieren wir die Gl. (4) durch r und setzen

$$\frac{x_0'}{r} = X_0', \quad \frac{y_0'}{r} = Y_0'; \qquad \frac{x_0''}{r} = X_0'', \quad \frac{y_0''}{r} = Y_0''; \qquad \ldots, \ldots,$$

werden diese Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} X_0'(t) = \cos\nu t\,\mathfrak{Cof}\,\mu t - \sin\nu t\,\mathfrak{Sin}\,\mu t - 2\,\beta\,r\,t\\ Y_0'(t) = \cos\nu t\,\mathfrak{Sin}\,\mu t - \sin\nu t\,\mathfrak{Cof}\,\mu t + 4\,r[\beta(\mu\cos 2\nu t\,\mathfrak{Sin}\,2\mu t + \nu\sin 2\nu t\,\mathfrak{Cof}\,2\mu t) +\\ \qquad\qquad a(\mu\sin 2\nu t\,\mathfrak{Sin}\,2\mu t - \nu\cos 2\nu t\,\mathfrak{Cof}\,2\mu t) + a\nu] \end{cases}\\ &\begin{cases} X_0''(t) = -(\cos\nu t\,\mathfrak{Sin}\,\mu t + \sin\nu t\,\mathfrak{Cof}\,\mu t) - 2\,\beta\,r\,t\\ Y_0''(t) = \cos\nu t\,\mathfrak{Cof}\,\mu t + \sin\nu t\,\mathfrak{Sin}\,\mu t + 4\,r[\cdots] + 1 \end{cases}\\ &\qquad \begin{cases} X_1'(t) = -(\cdots) - 2\,\beta\,r\,t\\ Y_1'(t) = -(\cdots) + 4\,r[\cdots] \end{cases} \quad \begin{cases} X_1''(t) = +(\cdots) - 2\,\beta\,r\,t\\ Y_1''(t) = -(\cdots) + 4\,r[\cdots] + 1 \end{cases} \end{aligned}\right\} (4').$$

Da für die Stabilität die Erfüllung der Bedingung $\mu = 0$ notwendig war, woraus die Vereinfachungen $\lambda = \nu = a = 1$, $\beta = -\mu\sqrt{\lambda} = 0$ folgen, gehen die Gl. (4') in

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} X_0'(t) = \cos t\\ Y_0'(t) = -\sin t + 8\,r\sin^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} X_0''(t) = -\sin t\\ Y_0''(t) = \cos t + 8\,r\sin^2 t \end{cases}\\ &\begin{cases} X_1'(t) = -\cos t\\ Y_1'(t) = \sin t + 8\,r\sin^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} X_1''(t) = \sin t\\ Y_1''(t) = -\cos t + 8\,r\sin^2 t \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

über, welche die parametrischen Gleichungen der stabilen Bahnkurven darstellen.

Die ersten Bestandteile der rechten Seiten dieser Gleichungen (die nach *sin* und *cos* linearen Gliedern) zeigen die stabilen Bahnkurven — Kreise — bei Störungen erster Ordnung; diese Kurven sind, wie man sieht, unabhängig von der Anfangsverschiebung r.

[2]) Wirbelquadrupel bei unserer alternativen Störung soll heißen: vier Wirbel, je zwei nacheinander (gerader und ungerader) der oberen bzw. der unteren Reihe. Er ist also ein Repräsentant der ganzen Wirbelstraße.

Um die Bahnkurve bei unseren Störungen zweiter Ordnung anschaulicher zu bekommen, eliminieren wir aus (5) die Zeit t. Dann haben wir

$$\left.\begin{aligned} Y_0' &= \mp\sqrt{1-X_0'^2}+8r(1-X_0'^2) \qquad & Y_1' &= \pm\sqrt{\cdots}+8r(\cdots) \\ Y_0'' &= \pm\sqrt{1-X_0''^2}+8rX_0''^2 \qquad & Y_1'' &= \mp\sqrt{\cdots}+8r(\cdots) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5').$$

Bevor wir die Gestalt der Kurven (5′) auffinden, bemerken wir, daß die Bahnen jedes Wirbels des Quadrupels auf ein eigenes Koordinatensystem bezogen ist, dessen Ursprung die Ausgangsstelle jedes Wirbels der ersten zwei Wirbelpaare ist. Die Beziehung auf diese Koordinatensysteme erhält man ja durch die Formel (I, 2′), die, wie man leicht ersieht, den Sinn einer Translation des Systems $O\,x\,y$ auf $O_k'\,X_k'\,Y_k'$ bzw. $O_k''\,X_k''\,Y_k''$ $(k=0,1)$ hatten.

Beschränken wir nun unsere Betrachtung nur auf die geraden Wirbel (O', O'') der beiden Reihen, so ersehen wir, daß für alle r die Kurve durch die festen Punkte $(\pm 1{,}0)$, bzw. $(0, \pm 1)$ laufen. Auf der Y-Achse liegen dagegen die mit r veränderlichen Punkte $(0, \pm 1 + 8\,r)$ und auf der Parallelen zur X-Achse — $(\pm 1, 8\,r)$. Der Abstand zwischen den veränderlichen Punkten ist $=2$. Man ersieht leicht, daß für $r = 1/8$ die Kurve des O'-Wirbels durch den Ursprung läuft; für $r > 1/8$ schneidet die X-Achse diese Kurve in zwei reellen Punkten, die symmetrisch in bezug auf die Y-Achse liegen und deren Abszisse < 1 sind; für $r < 1/8$ hat die Kurve keine anderen reellen Schnittpunkte mit der X-Achse. Dasselbe gilt für die Kurve des O''-Wirbels bezüglich der Gerade $y=1$. Zuletzt haben die betreffenden Kurven für $r=1/16$ eine Doppelberührung mit der X-Achse bzw. der Gerade $y=1$; für $r > 1/16$ — zwei Minima bzw. Maxima. Außerdem ist der Schnittpunkt der Kurve mit der $+\,Y$-Achse für $r > 1/16$ ein Maximum bzw. Minimum und mit der $-\,Y$-Achse — ein Minimum bzw. ein Maximum; für $r < 1/16$ in beiden Fällen oberhalb der X-Achse — Maximum, unterhalb derselben — Minimum.

Nimmt folglich die Anfangsverschiebung r nacheinander die Werte

$$1/32 \quad 1/16 \quad 1/10{,}6 \quad 1/8 \quad 1/6{,}4$$

an, so sehen die stabilen Bahnkurven bei Störungen zweiter Ordnung so aus:

O': $y' = \mp\sqrt{1-X_0'^2}+8r(1-X_0'^2)$ $\quad$ O'': $y_0'' = \mp\sqrt{1-X_0''^2}+8rX''^2_0$

$r = \frac{1}{32}$

$r = \frac{1}{16}$

$r = \frac{1}{10{,}6}$

$r = \frac{1}{8}$

$r = \frac{1}{6{,}4}$

Abb. 1 und Abb. 2.

Analoges wird es für die ungeraden Wirbel geben.

Alle diese Kurven sind für den Moment $t = 2\pi$ gezeichnet. Außer ihnen sind auch die Kreise mit Radien $= 1$ punktiert gezeichnet, die den Störungen erster Ordnung entsprechen. Aus dem Vergleich folgt:

1. Die stabilen Bahnen bei Störungen zweiter Ordnung unterscheiden sich wesentlich von denjenigen bei Störungen erster Ordnung.

2. Während für jedes r, wie grob es sein möge, als stabile Bahnen bei Störungen erster Ordnung immer Kreise (im allgemeinen Ellipsen) auftreten, sind diese Bahnen bei Störungen zweiter Ordnung mit r verschieden.

Je gröber r ist, desto beträchtlicher ist die Einbiegung der entsprechenden Kurve. Aus dieser Einbiegung, in unserem Falle nach der Y-Achse, ist das Auftreten der Instabilität wohl zu erwarten.

Man sieht also, von wie großer Bedeutung das Heranziehen der Störungen, wenn auch nur noch der zweiter Ordnung ist. Etwas Ähnliches tritt etwa bei der Betrachtung der Pendelbewegung auf. Aus diesem Grunde ist unsere erste Untersuchung (I) der Stabilität nur ein Ergebnis, welches als spezielle Lösung zweiter Ordnung gilt, ebenso wie die Kármánsche Lösung eine solche erster Ordnung ist. Es ist wohl zu erwarten, daß die stabilen Bahnkurven dritter, vierter usw. Ordnung mehrfach eingebogen erscheinen würden. Die von uns in Abb. 1 und Abb. 2 gegebenen sind ja nicht die maßgebenden, jedenfalls aber die charakteristischen.

Ähnliches galt auch für die Stabilität, wo ein charakteristisches Verhalten der gestörten Straße immer eine Instabilität vermuten ließ. Obwohl wir da nur spezielle Störungsgesetze behandelten, hätte man diese scheinbare Instabilität gar nicht erkannt, wenn man sich nur mit Störungen erster Ordnung begnügt hätte.

3. Bahnkurve der Instabilität. — Die instabilen Trajektorien ergeben sich am einfachsten, wenn wir von dem Falle in (I, Abb. 4) ausgehen. In diesem Falle ist $C_2 = -2r$, was bedeutet, daß die Störung sich auf diejenige Straße bezieht, deren Ausgangsbreite $2h_{\mathrm{I}} = 2h_{\mathrm{II}} - r$ ist. Das letztere bedeutete, daß die Störung erster Art, die auf die Straße mit der Breite $2h_{\mathrm{II}} - r$ ausgeübt wird, zu instabilen Bahnen führen wird, sobald diese Breite (bei festgehaltenem $l = 1{,}11\ldots$) nicht die Kármánsche ist. Wendet man dagegen auf die Kármánsche Breite

$$2h = 2 \times 0{,}281 \times 1{,}11 = 0{,}624$$

irgendeine Störung zweiter Art an, so würde das heißen, daß man eine Straße mit der Breite $0{,}624 - r$ durch Störung erster Art stört, was uns ebenso zu instabilen Trajektorien führen wird.

Da nun die Anfangsverschiebung r sehr klein ist, sieht man, daß die Breite der zu störenden Straße sich wenig von 0,624 unterscheiden wird. Die Größe der Verschiebung im Vergleich zu den Abmessungen der Anordnung eines Wirbelpaares (1,11; 0,624) muß also höchstens den Wert 0,1 der Straßenbreite haben. Wir nehmen $r = \frac{1}{4\pi} \sim 0{,}08$. Jetzt ist die Breite der Ausgangsstraße

$$2h_{\mathrm{I}} = 0{,}624 - 0{,}08 = 0{,}544\,.$$

Wir setzen nun in die Gl. (4) wieder $\mu = 0$ (dann ist $\lambda = a = \sigma = 1$, $\beta = 0$) ein, und auch noch $\tau = \mu - C_2 a = -C_2 = 2r = \frac{1}{2\pi}$. Da die Koeffizienten vor t^1 der x-Komponenten der oberen Reihe denjenigen der unteren Reihe gleich sind, können wir die neuen Koordinaten

$$\left.\begin{matrix} \left\{\begin{aligned} &\frac{x_0'}{r} + \left(1 + \frac{1}{4\pi}\right)t = \xi_0' \\ &\frac{x_0''}{r} + \left(1 + \frac{1}{4\pi}\right)t = \xi_0'' \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1'}{r} + (\cdots)\,t = \xi_1' \\ &\frac{x_1''}{r} + (\cdots)\,t = \xi_1'' \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} &\frac{y_0'}{r} = \eta_0' \\ &\frac{y_0''}{r} = \eta_0'' \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} &\frac{y_1'}{r} = \eta_1' \\ &\frac{y_1''}{r} = \eta_1'' \end{aligned}\right. \end{matrix}\right\} \quad (6)$$

einführen. (Hier ist wieder durch r dividiert worden.) (6) besagt also, daß wir die in (I) besprochene Translation der ganzen Wirbelkonfiguration außer acht lassen, d. h. nur die

relative Bewegung der Wirbel betrachten, bezüglich der neuen Koordinatensysteme, zu denen uns eben die Transformationsformel (6) führt. Nach ihrem Einsetzen und gewissen Umformungen gelangen wir zu den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\xi_0'(t) = \cos t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi} - \sin t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi}, \qquad \xi_1'(t) = \cdots, \qquad \eta_1'(t) = \cdots \\
\eta_0'(t) = \cos t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} - \sin t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi} + 0{\cdot}31\left(0{\cdot}16 \sin 2t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{\pi} - \cos 2t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{\pi} + 1\right)
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\xi_0''(t) = -\left(\cos t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} + \sin t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi}\right), \qquad \xi_1''(t) = \cdots, \qquad \eta_1''(t) = \cdots \\
\eta_0''(t) = \cos t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi} + \sin t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} + 0{\cdot}31\left(0{\cdot}16 \sin 2t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{\pi} - \cos 2t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{\pi} + 1\right) + 1
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad . \quad (7).$$

Die den Störungen erster Ordnung entsprechenden Gleichungen ergeben sich wieder, wenn wir uns nur auf die Glieder ersten Grades nach *sin* und *cos* beschränken. Sie lauten:

$$\left.\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}
\xi_0'(t) = \cos t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi} - \sin t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} \\
\eta_0'(t) = \cos t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} - \sin t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi}
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
\xi_0''(t) = -\cos t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} - \sin t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi} \\
\eta_0''(t) = \cos t\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{t}{2\pi} + \sin t\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{t}{2\pi} + 1
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad . \quad (8).$$

Diese Gleichungen müßten eigentlich aus (I, 11) herauskommen, nachdem man auf dieselben den in (I, Abb. 4) gegebenen Fall anwendet. Man findet aber sofort, daß für $\mu = 0$ die betreffenden Gleichungen zu Stabilität führen, obwohl in diesem Falle nicht eine Straße mit Kármánscher Anordnung (0,624) gestört wird, sondern eine schmalere (0,544). In solchem Sinne erweist sich diese Stabilität, genauer diese Indifferenz, bei Störungen erster Ordnung, als Instabilität bei Störungen höherer Ordnung. Wir haben aber schon gezeigt (I), daß sich in Wirklichkeit nicht die Kármánsche ($h/1 = 0{,}281$), sondern eine andere Anordnung als instabil erweist.

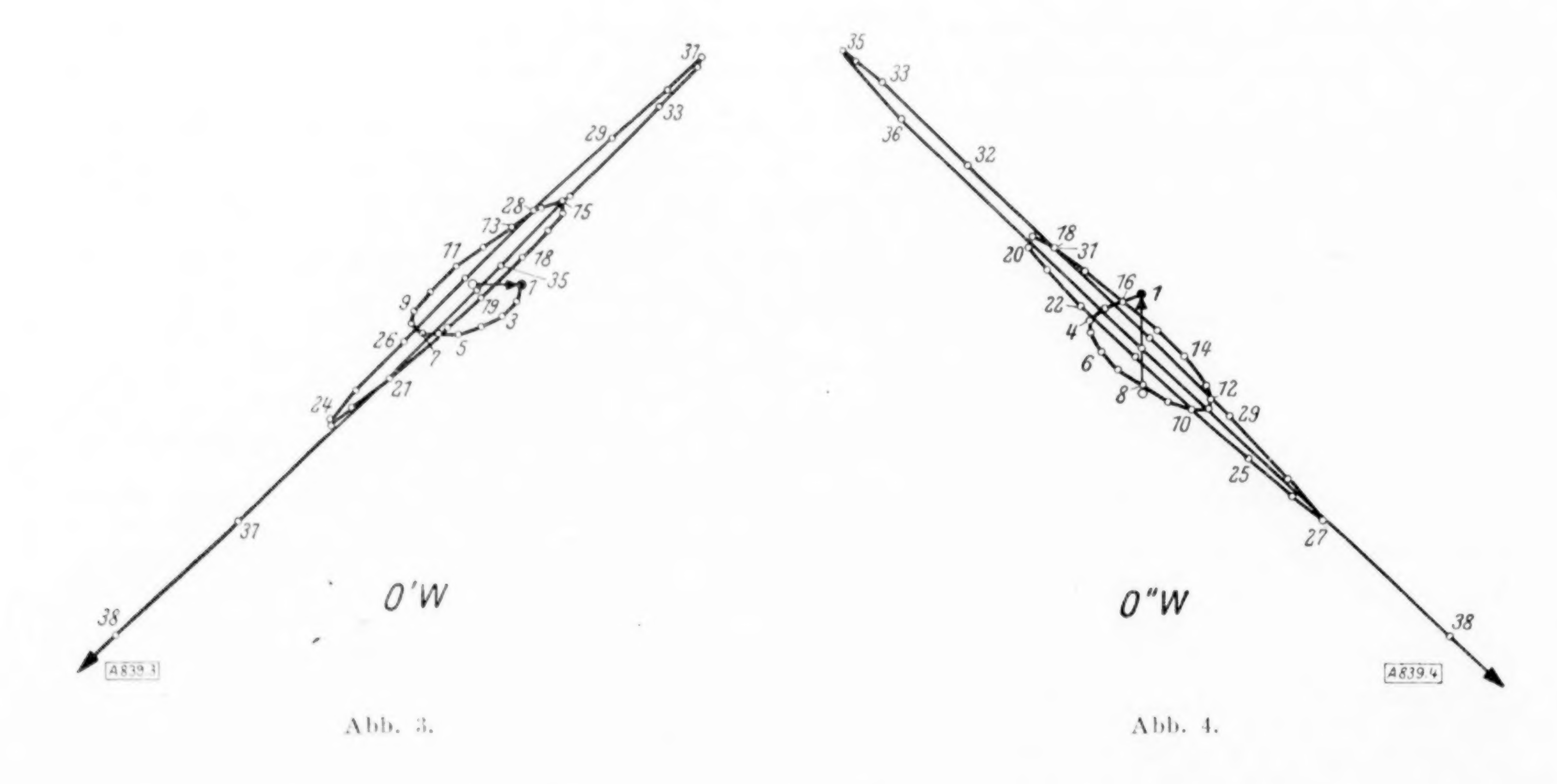


Abb. 3. Abb. 4.

Ich knüpfe also an diese Überlegung noch die Bemerkung, daß wir in der Tat erst dann über die Ergebnisse der linearen Störungstheorie sicher sein können, wenn sie als Folgerung einer Betrachtung höherer Ordnung erscheinen, wie (8) aus (7), nicht aber aus (I, 11) resultiert.

So kommen wir zur Konstruktion der instabilen Bahnkurven (8) und (7). Das tun wir, indem wir die Zeit t sich immer um $\frac{\pi}{8}$ ändern lasssen. (Für die Tabelle siehe meine bulgarische Dissertation.) Die Abb. 3 und 4 stellen stückweise die instabilen Bahnkurven der geraden O'- und O''-Wirbel bei Störungen erster Ordnung, und die Abb. 5, 6, 7, 8 — diejenigen der geraden und ungeraden Wirbel der oberen und der unteren Reihen bei Störungen zweiter Ordnung dar. Die letzteren sind dabei in eine Kármánsche Wirbelstraße (als Quadrupel) vereinigt.

Nun müssen wir zunächst den Vergleich der Bahnen beider Störungen erster und zweiter Ordnung ausführen. Während sich die Bahnkurven erster Ordnung mit Anwachsen der Zeit t den Geraden $\eta_0' - \xi_0' = 0$ bzw. $\eta_0'' + \xi_0'' = 1$ annähern, breiten sich die Bahnkurven zweiter Ordnung weit auf beiden Seiten dieser Geraden aus. Anfangs, wenn t von 0 bis 2π läuft, gleichen die Kurvenbogen der Abb. 3, 4 einem Kreise, während die der Abb. 5, 6, 7, 8 — den Kurven der Abb. 1, 2 der Stabilität ähnlich sind. In beiden Fällen sieht man aber, daß die Wirbel lange Zeit immer noch um die Ausgangspunkte oszillieren. Wie gesagt, stellen uns die Abb. 5, 6, 7, 8 zusammen eine Teilstrecke der Kármánschen Wirbelstraße dar. Der Verlauf der Vorgänge in dieser Teilstrecke gibt uns das Bild für die ganze Straße, wegen der kongruenten Bahnen aller Wirbelquadrupel. Aus diesem Bilde kann man noch eine weitere interessante Folgerung ziehen. Man sieht nämlich, daß der Abstand zweier Wirbel eines Paares bald zu-, bald abnimmt. Er bleibt jedenfalls lange Zeit fast unverändert, was bedeutet, daß die beiden geradlinigen parallelen Reihen lange Zeit immer noch als parallel, aber nicht geradlinig, erscheinen. Da man nicht dasselbe von den Amplituden der ganzen Straße behaupten kann, könnte man den Schluß ziehen, daß *die Zerstörung der Wirbelkonfiguration sowohl infolge des Vernichtens eines jeden Wirbelpaares, als auch (vielmehr) infolge der großen Transversalamplituden der Wirbelstraße zustande kommt.*

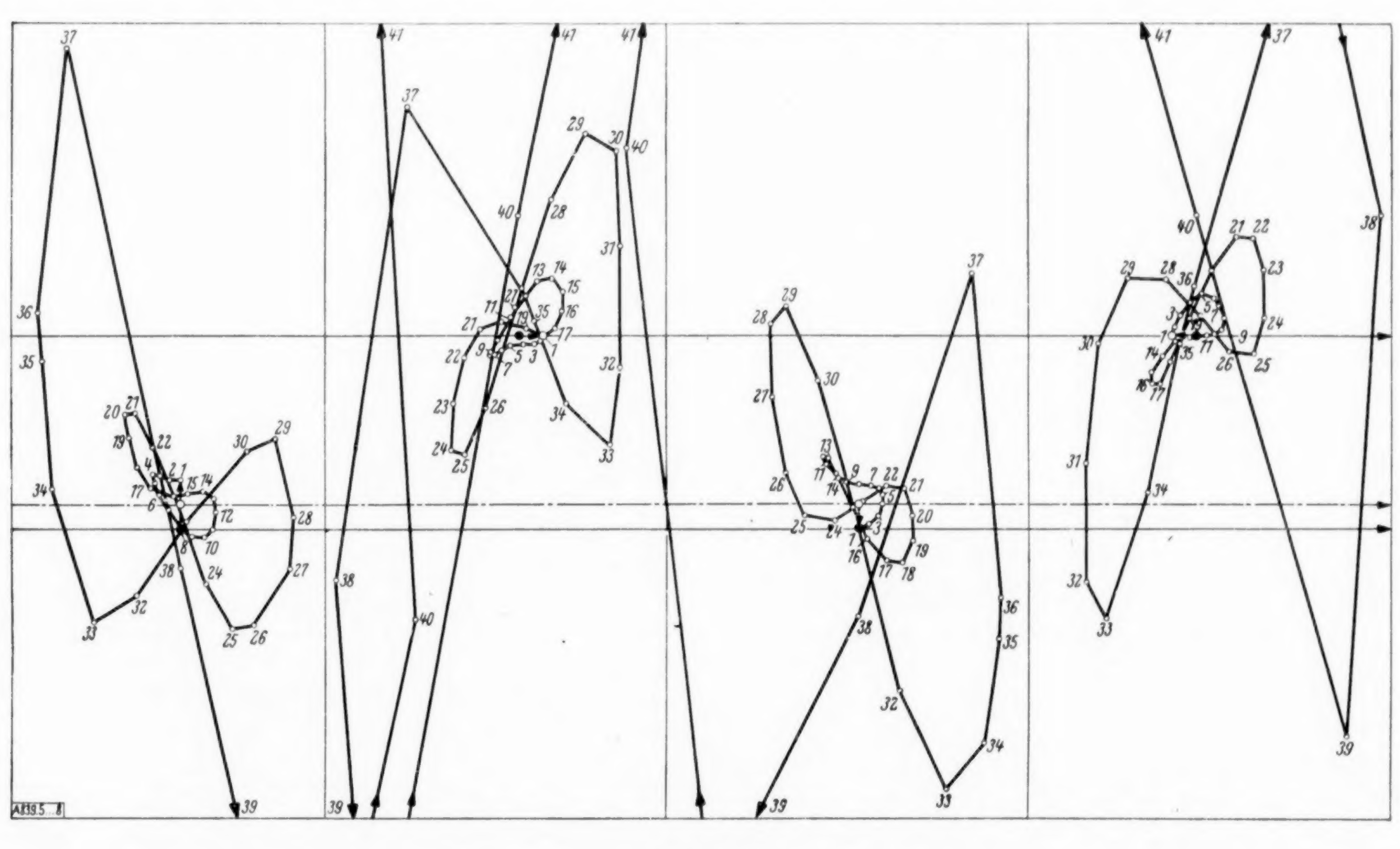


Abb. 5 bis 8.

In unseren Abb. 5, 6, 7, 8 hat die Straße ursprünglich die Kármánsche Anordnung (0,624); gestört worden ist aber in Wirklichkeit jene Straße (mit der unteren Reihe punktiert), welche die Breite 0,544 hat. Die Instabilität kommt allmählich und in unregelmäßigen Perioden oszillatorisch.

Anhang. In meiner ersten Mitteilung (I) habe ich gezeigt, daß, der Definition nach, $C_2 = \bar{y}_0' + \bar{y}_1' - (\bar{y}_0'' + \bar{y}_1'')$ immer gleich Null angenommen werden muß. Man kann diese

Tatsache aber auch beweisen[3]). Wir stellen uns nämlich folgende Aufgabe: *Gegeben seien zwei Punktreihen* Z_j', Z_k'' $(j, k = -\infty \cdots +\infty)$,

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_{-1}. & & .Z_0' & & .Z_1' & & .Z_2' \\ & Z_0''. & & Z_1''. & & Z_2''. & \end{array}$$

die eine gestörte Wirbelstraße (für $t = 0$) darstellen. Es ist eine Anfangskonfiguration aufzufinden, woraus diese Punktreihe durch „alternative" Störungen entstanden sind. (Die Z sollen komplexe Zahlen bezeichnen.)

Lösung: Wir bezeichnen mit $z_j' = z_0' + j\,c$, $z_k'' = z_0'' + k\,c$ die Ausgangslage der Punkte (Wirbel) und mit $\begin{cases} r_0', r_1' \\ r_0'', r_1'' \end{cases}$ die Verrückungen, die wir ihnen mitgeteilt haben, so daß wir die Punkte Z_j', Z_k'' erhalten. Wir haben also

$$\left.\begin{array}{c} z_0' + r_0' = Z_0',\ z_0' + c + r_1' = Z_1',\ z_0' + 2\,c + r_0' = Z_2',\ z_0' + 3\,c + r_1' = Z_3', \ldots; \\ z_0'' + r_0'' = Z_0'',\ z_0'' + c = Z_1'',\ z_0'' + 2\,c + r_0'' = Z_2'', \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad \text{(a)}.$$

Daraus folgen die notwendigen Bedingungen

$$\begin{array}{cccc} Z_2' = Z_0' + 2\,c & Z_3' = Z_1' + 2\,c & Z_2'' = Z_0'' + 2\,c & Z_3'' = Z_1'' + 2\,c \\ Z_4' = Z_0' + 4\,c & Z_5' = Z_1' + 4\,c & Z_4'' = Z_0'' + 4\,c & Z_5'' = Z_1'' + 4\,c \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

oder

$$Z_2' - Z_0' = Z_3' - Z_1' = Z_4' - Z_2' = \cdots = Z_2'' - Z_0'' = Z_3'' - Z_1'' = Z_4'' - Z_2'' = \cdots.$$

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so hat die Aufgabe keine Lösung. Sind sie dagegen erfüllt, d. h. ist $\overrightarrow{Z_0' Z_2'} = \overrightarrow{Z_1' Z_3'} = \cdots = 2\vec{c}$, so gibt uns der so definierte Vektor $2\vec{c}$ die Richtung der Straße und den Abstand $(2\,l = |c|)$ zweier Wirbel jeder Reihe. Nehmen wir die x-Achse parallel dem Vektor $\vec{c}$ an, dann ist c eine reelle Zahl $(c = 2\,l)$. Jetzt bleiben nur die Gleichungen (im Reellen 8 Gleichungen)

$$\left.\begin{array}{ll} z_0' + r_0' = Z_0' & z_0'' + r_0'' = Z_0'' \\ z_0' + r_1' = Z_1' - c & z_0'' + r_1'' = Z_1' - c \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(b)}.$$

Dazu verlangen wir aber noch: 1. unsymmetrische Anordnung: $z_0' - z_0'' = l + 2\,i\,h - h$ unbekannt, $\Re(z_0' - z_0'') = l$ — bekannt; 2. $r_0' + r_1' - (r_0'' + r_1'') = C_1 + i\,C_2 = C$ — reell, d. h. $\Im(r_0' + r_1' - r_0'' - r_1'') = 0$ oder $C_2 = 0$; 3. $r_0', r_1'; r_0'', r_1''$ — klein genug. 1 und 2 geben noch zwei Gleichungen; wir haben also 10 Gleichungen mit 12 reellen Unbekannten (z_0', z_0''; $r_0', r_1', r_0'', r_1'' \times 2$).

Bemerkungen: Aus (b) folgt

$$2\,(z_0' - z_0'') + r_0' + r_1' - (r_0'' + r_1'') = Z_0' + Z_1' - Z_0'' - Z_1''$$

oder

$$2\,l + C_1 = X_0' + X_1' - (X_0'' + X_1'')$$

$$4\,h + C_2 = Y_0' + Y_1' - (Y_0'' + Y_1'')$$

und daraus

$$C_1 = X_0' + X_1' - (X_0'' + X_1'') - 2\,l \qquad (\neq 0 \text{ im allgemeinen})$$

$$2\,h = \frac{Y_0' + Y_1'}{2} - \frac{Y_0'' + Y_1''}{2}.$$

[3]) Den Beweisgang verdanke ich Herrn A. Stojanow, Professor für Mathematik an der Universität Sofia.

Geometrisch bedeuten die letzteren Gleichungen folgendes: Wir betrachten den Vektor $\zeta = \frac{Z_0' + Z_1'}{2} - \frac{Z_0'' + Z_1''}{2}$ (siehe Abb. 9). Setzt man $\zeta = \xi + i\eta$, dann ist $C_1 = 2(\xi - l)$, $2h = \eta$. Daraus bekommt man eine neue Bedingung: 1. Da C_1 klein genug sein muß, so muß sich ξ nur wenig von l unterscheiden; 2. die Breite der Straße $2h = \eta$ ist gleich der Projektion von ζ auf eine zu c senkrechte Gerade.

Wir sahen oben, daß wir nur 10 Gleichungen für 12 reelle Unbekannten haben. Die Aufgabe ist also unbestimmt. Nehmen wir aber $\frac{z_0' + z_0''}{2} = \omega$ beliebig an, dann wird die Aufgabe schon bestimmt. Denn wir haben jetzt

$$\begin{aligned} z_0' - z_0'' &= l + 2ih \\ z_0' + z_0'' &= 2\omega \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} z_0' &= \frac{l}{2} + ih + \omega \\ z_0'' &= \omega - \frac{l}{2} - ih \end{aligned} \right.$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} r_0' &= Z_0' - z_0' = Z_0' - \frac{l}{2} - ih - \omega \qquad & r_1' &= Z_1' - z_0' - c = Z_1' - \frac{l}{2} - ih - \omega - 2l \\ r_0'' &= Z_0'' + \frac{l}{2} + ih - \omega & r_1'' &= Z_1'' + \frac{l}{2} + ih - \omega - 2l \end{aligned} \right. .$$

Alle diese Ausdrücke enthalten den willkürlichen Parameter ω. Wenn wir annehmen, es sei $\omega = \frac{Z_0' + Z_1' + Z_0'' + Z_1''}{4} - l$, dann ist

$$z_0' = \frac{Z_0' + Z_1' + Z_0'' + Z_1''}{4} - \frac{l}{2} + ih, \quad z_0'' = \cdots$$

$$r_0' = Z_0' - \frac{Z_0' + Z_1' + Z_0'' + Z_1''}{4} + \frac{l}{2} - ih, \quad r_1' = Z_1' - \frac{Z_0' + Z_1' + Z_0'' + Z_1''}{4} - \frac{3}{2}l - ih$$

$$r_0'' = \cdots, \quad r_1'' = \cdots .$$

Wir können ω auch folgendermaßen darstellen

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_0' + Z_1'}{2} + \frac{Z_0'' + Z_1''}{2}\right) - l = \frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'') - l = \zeta_0 - l$$

und leicht konstruieren (Abb. 9).

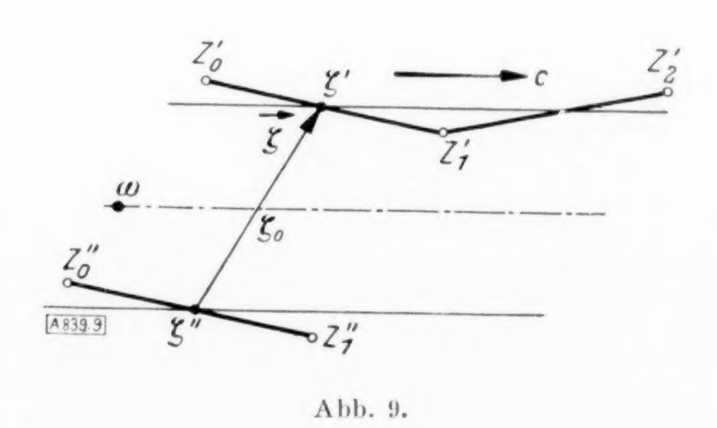


Abb. 9.

Über die Kipp-Stabilität der Holme im Rippenverband.

Von *Josef Weinhold* in Brünn.

In der vorliegenden Arbeit werden unter vereinfachenden Annahmen — insbesondere, daß die Holme sehr schmal sind — Kipplasten eines Holm-Rippenrostes hergeleitet. Als Belastungen werden in den beiden Holmen gleiche oder entgegengesetzt gleiche konstante Biegungsmomente und konstante Druckkräfte angenommen. — Nebeneinander liegende Holmenden haben dieselbe Endbefestigung. Es sind vier verschiedene Kombinationen von Befestigungen der Holmenden behandelt, die den Knickfällen mit beiderseitiger Lagerung der Stabenden entsprechen.

Die ermittelten Kippgrenzen können als Maß für die Kippsteifigkeit eines Holm-Rippenrostes angesehen werden.

1. Einleitung und Aufgabenstellung. In den Vorschriften über die Festigkeit von Flugzeugen wird gefordert, daß eine Grenze elastischer Stabilität erst bei einem gewissen Vielfachen der „sicheren Last" [1] erreicht wird. — Die bisherigen Untersuchungen über die Frage der elastischen Stabilität von Holm-Rippenrosten ohne tragende Außenhaut und andere, die Steifigkeit erhöhende Elemente — die durch Teichmann [2][1]) zu einem gewissen Abschluß gelangt sind — beziehen sich nur auf die Möglichkeit des Ausknickens senkrecht zur Rostebene.

Im Sinne der eingangs erwähnten Forderung müßte auch für die verschiedenen Belastungsfälle des Rostes die Höhe der Kipp-Knickgrenze der Holme im Rippenverband erhoben werden, wenn also die angenommene Verschiebung vom Zustand der Hauptbiegung eine Verbiegung der Holmachse in der Rostebene, verbunden mit einer Verdrehung der Holmquerschnitte um die Holmachse, ist. — Für die erstmalige[2]) Behandlung dieses Problems werden die folgenden Voraussetzungen und Annahmen gemacht: a) Die der Hauptbiegung der Holme zugeordnete Steifigkeit B ist im Verhältnis zur Steifigkeit der Querbiegung A und der Torsionssteifigkeit C sehr groß. Eine Flanschwirkung besteht nicht. b) Von den drei Steifigkeiten der n gleichen Zwischenrippen werden nur die Biegungssteifigkeiten berücksichtigt. Die Torsionssteifigkeit kann vernachlässigt werden. c) Die beiden Holme 1 und 2[3]) (siehe die Abb. 1[4])) sind elastisch gleich. In unbelastetem Zustand bilden die Schwerachsen der Holme

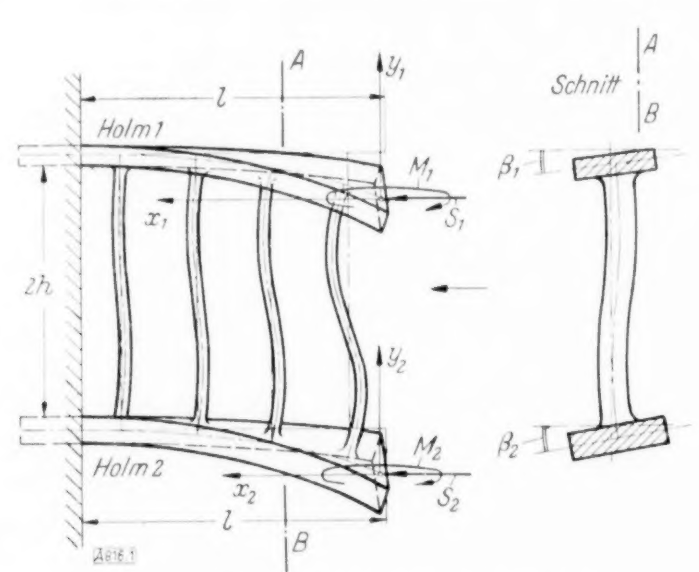


Abb. 1. Holm-Rippenrost, schematisch.

und Rippen ein Rechtecknetz. Die Hauptachsen der Holm- und Rippenquerschnitte stehen dann senkrecht zur Rostebene bzw. liegen in ihr. Der Innenabstand der Holme ist $2h$, ihre freie Länge zwischen den Auflagern l. Die Rippen sind biegesteif an die Holme angeschlossen. d) Die Steifigkeit der Zwischenrippen wird gleichmäßig auf die Holmlänge l aufgeteilt. e) Die Steifigkeiten sind konstante Größen. Die Querschnittsformen bleiben während des Kippvorganges erhalten. f) Die seitlichen Verschiebungen der Holme sind von erster Ordnung klein gegenüber den Längenabmessungen l und h des Rostes. g) Die Längsdehnung der Rippen

[1]) In dieser Arbeit findet sich auch ein umfangreiches Schrifttumverzeichnis und kurze Besprechungen der wichtigsten Arbeiten über die Druck-Biegung. Hierher gehört auch eine neuere Arbeit von Schmieden [3].

[2]) Den Einfluß einer Stützung der schmalen Schiene, welche allein dem Wachsen des Kippwinkels entgegenwirkt [4] und die Wirkung einer elastischen Einspannung der Enden eines sonst freien Stabes mit Druck-Biegebelastung [5] hat der Verfasser bereits früher behandelt. Ebenso wurden schon eine Reihe sehr einfacher Sonderlösungen des vorliegenden Problems mitgeteilt [6].

[3]) Die Zeiger 1 bzw. 2 weisen auf den Holm 1 bzw. 2 hin, welchem die betreffende Größe zugeordnet ist. Ohne Zeiger gilt eine Größe für beide Holme, wenn nicht anders festgelegt.

[4]) Die Abb. 1 ist der in Fußnote [2]) erwähnten Arbeit [6] entnommen. Der gezeichnete Fall des Kragrostes wird nicht behandelt, er wurde nur als deutlichste Darstellung gewählt.

ist im Verhältnis zur Auslenkung der Anschlußpunkte vernachlässigbar klein. h) Die Verformungen erfolgen innerhalb des Gültigkeitsbereiches des Hookeschen Gesetzes. i) Die statische Rippenverbundwirkung [2] [7] [8] kann vernachlässigt werden. k) Die äußere Belastung des Rostes wird in den Endquerschnitten der Holme eingeleitet und ist gegeben durch Biegemomente M_1 bzw. M_2 und Druckkräfte S_1 bzw. S_2.

Zufolge a) und f) kann in den Ausdrücken für den Drall und die Krümmung der Querbiegung [9] der die Hauptbiegung enthaltende Anteil vernachlässigt und an Stelle der Bogenlänge die Längskoordinate gesetzt werden. Nach c) sind die Holmachsen ohne seitliche Vorkrümmung und ohne Anfangsdrall. Es läßt sich zeigen, daß beispielsweise der Einfluß eines Anfangsdralls im Vergleich zur Hauptbiegung wie $C(C-A)/B(B-A)$ klein wäre. — Die Steifigkeit einer der n gleichen Zwischenrippen sei B_r/n für eine Verbiegung senkrecht zur Rostebene, A_r/n für eine Verbiegung in der Rostebene. Die Annahme d) ist nur dann zutreffend, wenn der Rippenabstand verhältnismäßig klein ist und insbesondere der B_r enthaltende Parameter nicht zu groß wird. Die Steifigkeit A_r ist praktisch hierfür von geringem Einfluß, weil A_r stets kleiner als B_r ist. Für die Mindestzahl der Rippen läßt sich eine Grenze angeben, indem man B_r als unendlich groß ansieht und untersucht, für welchen Rippenabstand ein Auskippen zwischen den Rippen erfolgt [5]. Nach g) können die Auslenkungen y_1 und y_2 (siehe die Abb. 1) für die gleiche Längskoordinate x einander gleich gesetzt werden:

$$y_1(x) = y_2(x) = y(x) \quad \ldots \ldots \quad (1.1).$$

Eine wichtige Annahme ist die weiter unten als zulässig erkannte Vernachlässigung der statischen Rippenverbundwirkung. Es wird also angenommen, daß die Hauptbiegung für jedes x stets den in den Endquerschnitten eingeleiteten Biegungsmomenten entspricht.

Schon die Behandlung des Einflusses der Verbundwirkung einer Endrippe muß vorderhand zurückgestellt werden, wie an Hand des in der Abb. 2 dargestellten Systems — aus zwei gleichen, einseitig eingespannten schmalen Schienen und einer die freien Enden verbindenden Rippe bestehend — gezeigt werden soll. Die Endrippe übertrage nur Kräfte in

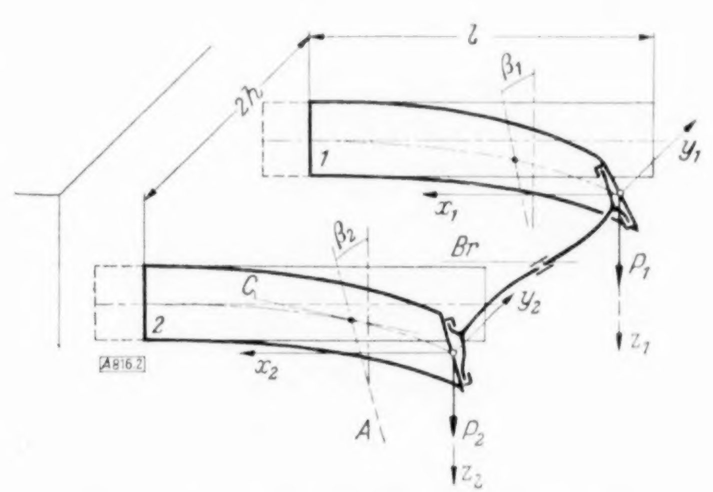


Abb. 2. Kippen mit Rippenverbundwirkung.

der yz-Ebene. Durch besondere Vorkehrungen sollen zwei gegenüberliegende Punkte der Schienenachsen immer die gleiche Entfernung $2h$ haben. Sind β_1 und β_2 die Kippwinkel und ist weiters mit den in der Abb. 2 eingetragenen Bezeichnungen

$$\xi = x/l, \qquad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \ldots \ldots \quad (1.2),$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{P_1 l^2}{\sqrt{AC}}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \frac{P_2 l^2}{\sqrt{AC}} \quad \ldots \ldots \quad (1.3)$$

und

$$\mathfrak{Z}^{5)} = \frac{3}{2} \frac{B_r l^2}{C h^2} \sqrt{\frac{A}{C}} \left(\beta_1(\xi=0) + \beta_2(\xi=0)\right) \quad \ldots \ldots \quad (1.4),$$

dann ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen die folgenden Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1'' + \xi^2/2 \left\{(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{Z})^2 \beta_1 + (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{Z})(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{Z}) \beta_2\right\} = 0 \\ \beta_2'' + \xi^2/2 \left\{(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{Z})^2 \beta_2 + (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{Z})(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{Z}) \beta_1\right\} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1.5).$$

[5]) $\mathfrak{Z}$ ist proportional der durch die Rippe $\parallel z$ übertragenen Querkraft.

Die zugehörigen Grenzbedingungen sind

und

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1(\xi=1)=\beta_2(\xi=1)=0 \\ &\beta_1'(\xi=0)=\frac{B_r l}{C h}(2\beta_1(\xi=0)+\beta_2(\xi=0)), \\ &\beta_2'(\xi=0)=\frac{B_r l}{C h}(2\beta_2(\xi=0)+\beta_1(\xi=0)) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.6).$$

Gefragt ist der Verlauf von β_1 und β_2 in Abhängigkeit von P_1 und P_2. Die Beziehungen (1.5) und (1.6) führen auf zwei belastete, nicht lineare Integralgleichungen, deren allgemeine Systematik noch nicht vorliegt.

Die Einführung gleicher Endmomente und gleichbleibende Längskraft der Holme ermöglicht erstens geschlossene Ausdrücke für die Lösungen, zweitens sind für diese „völligsten" Belastungen die niedrigsten Kippziffern zu erwarten. Die Vernachlässigung der statischen Rippenverbundwirkung bewirkt — wie man annehmen kann — ebenfalls eine Erniedrigung der Stabilitätsgrenze, weil durch den Wegfall des Belastungsausgleiches infolge der statischen Rippenverbundwirkung die Holme früher die kritische Belastung erfahren.

Unter den obigen Voraussetzungen werden Zusammenhänge zwischen der Belastung und den Kenngrößen des Rostes für neutrales elastisches Gleichgewicht hergeleitet. Die zugehörigen Lasten können als oberste Schranke angesehen werden, bis zu welcher bei veränderlichem Biegungsmoment und veränderlicher Druckkraft sicheres elastisches Gleichgewicht herrscht, wenn die Höchstwerte der veränderlichen Lastverteilung zum Vergleich herangezogen werden. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sollen erste Anhaltspunkte zur Abschätzung der Kipp-Knickgrenze zweiholmiger Rostabschnitte sein, wenn die Holmquerschnitte verhältnismäßig schmal und die Rippenanschlüsse nicht sehr starr sind und wenn weiters die Druckkräfte verhältnismäßig groß sind.

2. Die Energiegleichung und die Differentialgleichungen. Bedeutet L_i die Formänderungsarbeit, L_a die Arbeit der äußeren Kräfte während des Kipp-Vorganges, so ist der verschwindende Ausdruck

$$J=L_i-L_a=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2.1)$$

zugleich ein Extremalwert [10]. L_a setzt sich zusammen aus der Arbeit der Endmomente L_{aM} und der Arbeit der Druckkräfte L_{aS}.

Der Anteil des Krümmungsvektors der Querbiegung in der Richtung von M ist $-y''\beta$, mit

$$\varkappa \approx v'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2.2)$$

[12]. Wir erhalten demnach

$$L_{aM}=-M_1\int_0^l y''\beta_1\,dx-M_2\int_0^l y''\beta_2\,dx \quad \ldots \ldots \ldots (2.3).$$

Die Arbeit der Druckkräfte ist [10]

$$L_{aS}=\frac{1}{2}(S_1+S_2)\int_0^l y'^2\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2.4).$$

Die Arbeit der inneren Kräfte ist mit Beachtung von (1.1) die Summe aus

$$L_{iA}=A\int_0^l y''^2\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2.5),$$

$$L_{iC}=\frac{1}{2}C\int_0^l(\beta_1'^2+\beta_2'^2)\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2.6)$$

und der Arbeit, welche von den Rippen bei ihrer Verbiegung während des Kippvorganges aufgenommen wird. Denken wir uns eine Zwischenrippe in den Anschlußpunkten durchschnitten, dann ergeben sich in einer Ebene senkrecht zum Rost die in der Abb. 3 eingetragenen verbiegenden Kräfte. Der Höhenunterschied der Anschlußpunkte ist wegen der Voraussetzungen a) und f) von zweiter Ordnung klein. Wir können deshalb die Tangenten-

neigung der Rippe in den Anschlußpunkten gleich den Kippwinkeln setzen. Mit B_r/l als Rippensteifigkeit pro Einheit der Holmlänge erhalten wir als Schnittreaktionen

$$m_1 = \frac{B_r}{l\,h}(2\,\beta_1 + \beta_2), \qquad m_2 = \frac{B_r}{l\,h}(2\,\beta_2 + \beta_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.7)$$

und

$$p = \frac{3}{2}\,\frac{B_r}{l\,h^2}(\beta_1 + \beta_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.8).$$

Die Momente m_1, m_2 leisten auf dem Wege von Null bis β_1 bzw. von Null bis β_2 die Arbeit $\frac{1}{2}\,m_1\,\beta_1$ bzw. $\frac{1}{2}\,m_2\,\beta_2$, zusammengefaßt

$$L_{i\,Br} = \frac{B_r}{l\,h}\int_0^l (\beta_1^2 + \beta_1\,\beta_2 + \beta_2^2)\,d\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.9).$$

Die Arbeit der Transversalkräfte p, welche die Hauptbiegung während des Kippvorganges ändern, würde in Anbetracht der Formel für $L_{a\,M}$ Glieder mit den Faktoren $y''\,\beta^2$ enthalten, ist also von dritter Ordnung klein. Die Arbeit der Torsionsmomente um die Längsachse der

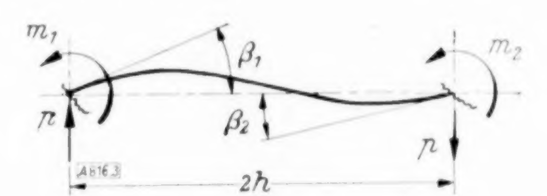


Abb. 3. Zur Herleitung der Rippenreaktionen.

Rippen wäre von vierter Ordnung klein, da diese Momente linear von der Differenz der Krümmungskomponenten der Holmachsen in der Richtung der Rippenachsen abhängen, die selbst von zweiter Ordnung klein ist und der Drehwinkel hierbei durch die gleiche Differenz gegeben ist. Die Arbeit der in den Anschlußpunkten parallel zu den Holmachsen übertragenen Kräfte ist von dritter Ordnung klein, da den linear von y' abhängigen Kräften ein Weg von der Größenordnung y'^2 entspricht. Die Arbeit der Rippenlängskräfte in den Anschlußpunkten ist von vierter Ordnung klein, weil die von der Verschiebung $y_1 - y_2$ linear abhängigen Längskräfte auf dem Weg $y_1 - y_2$ eine Arbeit leisten, der nach Voraussetzung g) klein gegen y ist. — Es verbleibt noch die Arbeit der in der Rostebene in den Rippenanschlußstellen übertragenen Momente. Der Drehwinkel der Endtangenten ist y', in der Rostebene gemessen. Wir haben demnach in (2.9) β_1 und β_2 durch y' und nach früherem B_r durch A_r zu ersetzen und erhalten

$$L_{i\,Ar} = 3\,\frac{A_r}{l\,h}\int_0^l y'^2\,d\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.10).$$

Hiermit sind alle 6 an den Schnittstellen übertragene Rippenreaktionen berücksichtigt. Fassen wir alle Anteile von zweiter Ordnung zusammen, so wird

$$J = \int_0^l \left\{ +(M_1\,\beta_1 + M_2\,\beta_2)\,y'' - \left(\frac{S_1 + S_2}{2} - 3\,\frac{A_r}{l\,h}\right) y'^2 + \frac{B_r}{l\,h}(\beta_1^2 + \beta_1\,\beta_2 + \beta_2^2) + \frac{1}{2}\,C\,(\beta_1'^2 + \beta_2'^2) + A\,y''^2 \right\} d\,x \quad \ldots\ldots \quad (2.11).$$

Da für $A/B \rightarrow 0$ und $C/B \rightarrow 0$ kleinere Größen als die zweiter Ordnung exakt zu vernachlässigen sind, so führt unter dieser Voraussetzung die Energiegleichung (2.11) zu exakten Ergebnissen für einen Rost, dessen Holme als schmale Schienen mit verschwindender Dicke angesehen werden können. — Nach Einführung der dimensionslosen Größen

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{M_1\,l}{\sqrt{A\,C}}, \qquad \mathfrak{m}_2 = \frac{M_2\,l}{\sqrt{A\,C}} \text{ [6]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.12),$$

[6] $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ sind „Kippziffern" [12].

$$\mathfrak{s} = \frac{(S_1 + S_2)\, l^2}{2\, A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.13),$$

$$\mathfrak{a} = \frac{A_r\, l}{A\, h}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{B_r\, l}{C\, h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.14)$$

und

$$\eta = y/l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.15)$$

erhalten wir mit $\xi = x/l$ nach (1.2):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J} = \int_0^1 \Big\{ &+ (\mathfrak{m}_1\, \beta_1 + \mathfrak{m}_2\, \beta_2)\, \eta' \sqrt{\frac{A}{C}} - (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\, \frac{A}{C}\, \eta'^2 \\ &+ \mathfrak{b}\, (\beta_1^2 + \beta_1\, \beta_2 + \beta_2^2) + \frac{1}{2}\, (\beta_1'^2 + \beta_2'^2) + \frac{A}{C}\, \eta''^2 \Big\}\, d\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.16).$$

Die Null gesetzten Euler-Lagrangeschen Ableitungen der Energiegleichung (2.16) ergeben als Differentialgleichungen des Problems:

$$\eta^{\mathrm{IV}} + (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\, \eta'' + \frac{1}{2}\, (\mathfrak{m}_1\, \beta_1'' + \mathfrak{m}_2\, \beta_2'') \sqrt{\frac{C}{A}} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.17)$$

und

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{m}_1 \sqrt{\frac{A}{C}}\, \eta'' + \beta_1'' - \mathfrak{b}\, (2\, \beta_1 + \beta_2) = 0 \\ -\mathfrak{m}_2 \sqrt{\frac{A}{C}}\, \eta'' + \beta_2'' - \mathfrak{b}\, (2\, \beta_2 + \beta_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.18).$$

Aus den Kirchhoff-Clebschschen Gleichungen für das Gleichgewicht dünner Stäbe [9] lassen sich unter den gleichen Annahmen und Voraussetzungen Gleichungen herleiten, die nach Einführung von $+y''$ für die Krümmung der Querbiegung und β' für den Drall lauten:

$$\eta^{\mathrm{IV}} + (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\, \eta'' + \frac{1}{2}\, (\mathfrak{m}_1\, \beta_1'' + \mathfrak{m}_2\, \beta_2'') \sqrt{\frac{C}{A}} \left(1 - \frac{C}{B}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.17\,\mathrm{a})$$

und

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{m}_1 \sqrt{\frac{A}{C}} \left(1 - \frac{A}{B}\right) \eta'' + \beta_1'' - \mathfrak{b}\, (2\, \beta_1 + \beta_2) = 0 \\ -\mathfrak{m}_2 \sqrt{\frac{A}{C}} \left(1 - \frac{A}{B}\right) \eta'' + \beta_2'' - \mathfrak{b}\, (2\, \beta_2 + \beta_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.18\,\mathrm{a}).$$

Für $A/B \to 0$, $C/B \to 0$ stimmen die beiden Differentialgleichungsgruppen überein. Die Gl. (2.17a) und (2.18a) beinhalten eine teilweise Berücksichtigung der endlichen Verhältnisse A/B und C/B, wie sie in praktischen Fällen immer vorliegen.

Der weiteren Behandlung werden die Gl. (2.17) und (2.18) zugrunde gelegt. Die erwähnte teilweise Berücksichtigung endlicher Verhältnisse A/B, C/B kann so erfolgen, daß der Wert von M an der Kippgrenze im Verhältnis $1 : \sqrt{\left(1 - \frac{A}{B}\right)\left(1 - \frac{C}{B}\right)}$ vergrößert wird.

Nach Wegschaffen von η^{IV} und η'' aus den Gl. (2.17) und (2.18) erhalten wir das Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^{\mathrm{IV}} + \left\{\frac{1}{2}\, \mathfrak{m}_1^2 + (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a}) - 2\,\mathfrak{b}\right\} \beta_1'' + \left\{\frac{1}{2}\, \mathfrak{m}_1\, \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{b}\right\} \beta_2'' - \mathfrak{b}\, (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\, (2\, \beta_1 + \beta_2) = 0 \\ \beta_2^{\mathrm{IV}} + \left\{\frac{1}{2}\, \mathfrak{m}_2^2 + (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a}) - 2\,\mathfrak{b}\right\} \beta_2'' + \left\{\frac{1}{2}\, \mathfrak{m}_1\, \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{b}\right\} \beta_1'' - \mathfrak{b}\, (\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\, (2\, \beta_2 + \beta_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2.19).$$

Die beiden Gleichungen sind linear, je von vierter Ordnung, haben konstante Koeffizienten und sind weiters simultan. Die zugehörige charakteristische Gleichung ist achten Grades. Demnach erscheint es mit Rücksicht auf einen tragbaren Aufwand bei der Gewinnung ziffernmäßiger Resultate notwendig, weitere vereinfachende Annahmen zu machen.

3. Der behandelte Sonderfall und die zugehörigen Grenzbedingungen. Wir verwenden zur Kennzeichnung die betreffende vereinfachende Annahme. Als solche setzen wir fest:

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2 .$$

Als Grenzbedingungen wählen wir vier Fälle, die dem beiderseits gelagerten Knickstab entsprechen und bezeichnen wie bei Grammel und Karas [11], [10] mit Fall I bis IV. Als Fall IV fungiert bei den genannten Verfassern der Kragträger. Hier ist der Fall des Kragträgers weniger interessant, weil praktisch druckbelastete Kragroste nicht von Bedeutung sind. Hier beziehen sich die für Fall IV angegebenen Grenzbedingungen auf einen in den Mittelpunkten der Endquerschnittsflächen mit Kugelgelenken abgestütztem Rost, dessen Endquerschnittsflächen durch Mitdrehen des Momentenvektors während des Kippvorganges und infolge der Kugelgelenke kein Drehmoment übertragen. Der Vektor M bleibt hierbei in der Rostebene und gleichzeitig normal zur Endtangente. Diese Annahme kann bei Versuchen durch starr angeschlossene Endhebel leicht verwirklicht werden. Die einzelnen in Betracht gezogenen Fälle sind in der Abb. 4 schematisch dargestellt. Je zwei gegenüberliegende

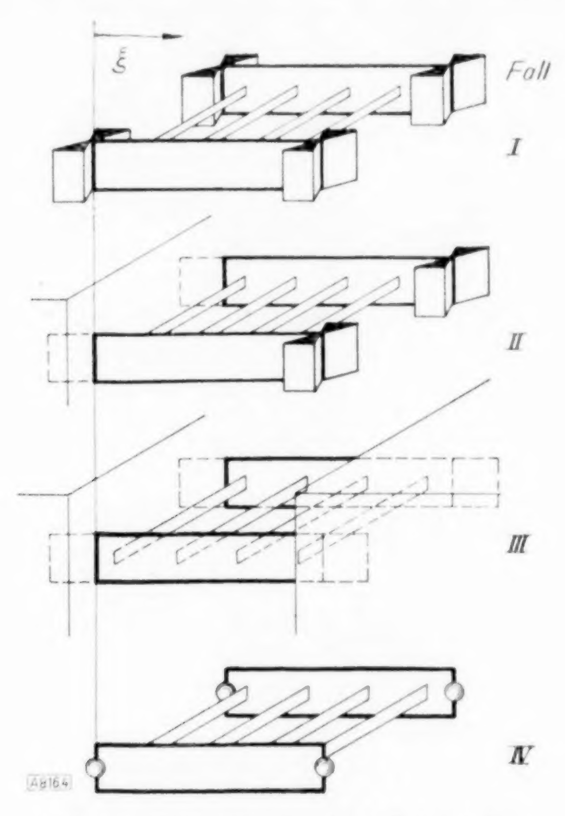


Abb. 4. Befestigung der Holmenden, schematisch.

Holmenden haben die gleiche Befestigung und zwar sind sie frei drehbar in Schneiden senkrecht zur Rostebene, fest eingeklemmt oder in raumfesten Kugelgelenken frei drehbar. Im einzelnen lauten die Grenzbedingungen bei

Fall I $\quad \beta(0) = \beta(1) = \eta''(0) = \eta''(1) = \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad \ldots \quad (3.1),$

Fall II $\quad \beta(0) = \beta(1) = \eta''(1) = \eta'(0) = \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad \ldots \quad (3.2),$

Fall III $\quad \beta(0) = \beta(1) = \eta'(0) = \eta'(1) = \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad \ldots \quad (3.3),$

Fall IV
$$\left.\begin{array}{l} \beta'(0) = \beta'(1) = \eta(0) = \eta(1) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{m}^2 - 3\,\mathfrak{b})\,\beta(0) + \beta''(0) = 0\,, \\ (\mathfrak{m}^2 - 3\,\mathfrak{b})\,\beta(1) + \beta''(1) = 0 \end{array}\right\} \text{für } \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2\,, \\ \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{b})\,\beta(0) + \beta''(0) = 0\,, \\ (\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{b})\,\beta(1) + \beta''(1) = 0 \end{array}\right\} \text{für } \mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3.4).$$

Daß in jedem Fall sechs Grenzbedingungen sechs linear voneinander unabhängigen Integrationskonstanten entsprechen, ist aus dem folgenden Punkt ersichtlich, ebenso die Bedeutung von β in den Grenzbedingungen.

4. Die allgemeinen Lösungen und die Kippbedingungen. Wir setzen den Gl. (2.17) und (2.18)

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} \quad \ldots \quad (4.1)$$

und erhalten nach Entfernen von η^{IV} und η''

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^{\mathrm{IV}} + \left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a} - 2\,\mathfrak{b}\right)\beta_1'' + \left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{b}\right)\beta_2'' - \mathfrak{b}\,(\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\,(2\,\beta_1 + \beta_2) = 0, \\ \beta_2^{\mathrm{IV}} + \left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a} - 2\,\mathfrak{b}\right)\beta_2'' + \left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{b}\right)\beta_1'' - \mathfrak{b}\,(\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\,(2\,\beta_2 + \beta_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (4.2).$$

Nach Einführung der neuen Veränderlichen

$$\beta = \frac{1}{2}\,(\beta_1 + \beta_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.3)$$

in die zusammengezählten Gl. (4.2) ergibt sich

$$\beta^{\mathrm{IV}} + (\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a} - 3\,\mathfrak{b})\,\beta'' - 3\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a})\,\beta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.4).$$

Mit

$$\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s} = v, \qquad 3\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = w \quad \text{und} \quad 3\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{s} - 3\,\mathfrak{a}) = u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.5)$$

erhalten wir formal dieselbe Differentialgleichung wie bei Grammel und Karas [11], [10],

$$\beta^{\mathrm{IV}} + (v - w)\,\beta'' - u\,\beta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.6).$$

Mit Einschluß der Grenzbedingungen besteht eine kinetische Analogie jedoch nur im Fall I, wo auch die Grenzbedingungen analog sind.

Die Lösungen von Gl. (4.6) sind verschieden, je nachdem $\mathfrak{s} > 3\,\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{s} < 3\,\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{s} = 3\,\mathfrak{a}$ ist. Für $\mathfrak{s} > 3\,\mathfrak{a}$ übernehmen wir die Lösung [11]

$$\beta = A\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\xi + B\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\xi + C\cos\lambda_2\,\xi + D\sin\lambda_2\,\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.7\,\mathrm{a})$$

mit

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{v - w}{2} + \sqrt{\left(\frac{v - w}{2}\right)^2 + u}}, \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{v - w}{2} + \sqrt{\left(\frac{v - w}{2}\right)^2 + u}} \quad . \; . \; (4.8\,\mathrm{a}).$$

Für $\mathfrak{s} < 3\,\mathfrak{a}$ lautet mit

$$\lambda_1' = \sqrt{\frac{v - w}{2} - \sqrt{\left(\frac{v - w}{2}\right)^2 + u}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.8\,\mathrm{b})$$

und λ_2 wie vorher die Lösung

$$\beta = A'\cos\lambda_1'\,\xi + B'\sin\lambda_1'\,\xi + C'\cos\lambda_2\,\xi + D'\sin\lambda_2\,\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.7\,\mathrm{b})$$

und schließlich für $\mathfrak{s} = 3\,\mathfrak{a}$ mit

$$\lambda = \sqrt{\mathfrak{m}^2 - 3\,\mathfrak{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.8\,\mathrm{c}).$$

$$\beta = \bar{A} + \bar{B}\,\xi + \bar{C}\cos\lambda\,\xi + \bar{D}\sin\lambda\,\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.7\,\mathrm{c}).$$

Die zugehörigen Lösungen η ergeben sich unter Beachtung der Festsetzungen (4.1) und (4.3) mit Hilfe der zweimal integrierten Gl. (2.18) der Reihe nach zu

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{C}{A}}}{\mathfrak{m}}\left\{\left(1 - \frac{3\,\mathfrak{b}}{\lambda_1^2}\right)[A\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\xi + B\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\xi] + \left(1 + \frac{3\,\mathfrak{b}}{\lambda_2^2}\right)[C\cos\lambda_2\,\xi + D\sin\lambda_2\,\xi] + E\,\xi + F\right\} \quad (4.9\,\mathrm{a}),$$

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{C}{A}}}{\mathfrak{m}}\left\{\left(1 + \frac{3\,\mathfrak{b}}{\lambda_1'^2}\right)[A'\cos\lambda_1'\,\xi + B'\sin\lambda_1'\,\xi] + \left(1 + \frac{3\,\mathfrak{b}}{\lambda_2^2}\right)[C'\cos\lambda_2\,\xi + D'\sin\lambda_2\,\xi] + E'\,\xi + F'\right\} \quad (4.9\,\mathrm{b})$$

und

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{C}{A}}}{\mathfrak{m}}\left\{3\,\mathfrak{b}\,(\bar{A}\,\xi^2/2 + \bar{B}\,\xi^3/6) + \left(1 + \frac{3\,\mathfrak{b}}{\lambda^2}\right)[\bar{C}\cos\lambda\,\xi + D\sin\lambda\,\xi] + \bar{E}\,\xi + \bar{F}\right\} \quad . \; . \; (4.9\,\mathrm{c}).$$

In ähnlicher Weise wie für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ ergeben sich für

$$\mathfrak{m}_1 = -\,\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.10)$$

und

$$\beta = \frac{1}{2}\,(\beta_1 - \beta_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.11)$$

Differentialgleichungen, die sich von denen für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ nur in dem Faktor vor $\mathfrak{b}$ — eins statt drei — unterscheiden. Wir erhalten demnach aus jeder allgemeinen Beziehung für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ die für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ geltende, indem wir $3\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}$ ersetzen.

Die Kippbedingungen sind in der folgenden Tabelle (4.1) für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ angeschrieben. Hiebei wurde noch abkürzend gesetzt:

$$A_1 = 1 - 3\mathfrak{b}/\lambda_1^2, \qquad A_2 = 1 + 3\mathfrak{b}/\lambda_2^2, \qquad A_1' = 1 + 3\mathfrak{b}/\lambda_1'^2 \quad \text{und} \quad A = 1 + 3\mathfrak{b}/\lambda^2 \quad (4.12).$$

Tabelle (4.1)

Fall	$\mathfrak{s}$, $3\mathfrak{a}$	Kippbedingung für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$
I	$\mathfrak{s} \gtreqless 3\mathfrak{a}$	$\sin\lambda_2 = 0$ . . . . (4.12) oder explizit mit $n = 1, 2, 3\ldots$ $3\mathfrak{b}(\mathfrak{s} - 3\mathfrak{a}) + \{\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s} - 3(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\}(n\pi)^2 = (n\pi)^4$ . . (4.13).
II	$\mathfrak{s} > 3\mathfrak{a}$	$A_1(1 - \lambda_1/\mathfrak{Tg}\,\lambda_1) = A_2(1 - \lambda_2/\mathrm{tg}\,\lambda_2)$ . . . . (4.14a),
	$\mathfrak{s} = 3\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b} = A(1 - \lambda/\mathrm{tg}\,\lambda)$ . . . . (4.14b),
	$\mathfrak{s} < 3\mathfrak{a}$	$\underbrace{A_1'(1 - \lambda_1'/\mathrm{tg}\,\lambda_1')}_{\mathfrak{F}_1'} = \underbrace{A_2(1 - \lambda_2/\mathrm{tg}\,\lambda_2)}_{\mathfrak{F}_2}$ . . . . . (4.14c).
III	$\mathfrak{s} > 3\mathfrak{a}$	$\begin{vmatrix} \lambda_1 A_1 \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 + \lambda_2 A_2 \sin\lambda_2 & \lambda_1 A_1(\mathfrak{Cof}\,\lambda_1 - 1) & \lambda_2 A_2(\cos\lambda_2 - 1) \\ A_1(\mathfrak{Cof}\,\lambda_1 - 1) - A_2(\cos\lambda_2 - 1, & A_1(\mathfrak{Sin}\,\lambda_1 - \lambda_1) & A_2(\sin\lambda_2 - \lambda_2) \\ \mathfrak{Cof}\,\lambda_1 - \cos\lambda_2 & \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 & \sin\lambda_2 \end{vmatrix} = 0$ (4.15a),
	$\mathfrak{s} = 3\mathfrak{a}$	$A[2\lambda(\cos\lambda - 1)(A - \mathfrak{b}) + 3\mathfrak{b}(\sin\lambda - \lambda)] = \left(\frac{3}{4}\mathfrak{b}^2 - \lambda^2 A^2\right)\sin\lambda$. (4.15b),
	$\mathfrak{s} < 3\mathfrak{a}$	$\begin{vmatrix} -\lambda_1' A_1' \sin\lambda_1' + \lambda_2 A_2 \sin\lambda_2 & \lambda_1' A_1'(\cos\lambda_1' - 1) & \lambda_2 A_2(\cos\lambda_2 - 1) \\ A_1'(\cos\lambda_1' - 1) - A_2(\cos\lambda_2 - 1) & A_1'(\sin\lambda_1' - \lambda_1') & A_2(\sin\lambda_2 - \lambda_2) \\ \cos\lambda_1' - \cos\lambda_2 & \sin\lambda_1' & \sin\lambda_2 \end{vmatrix} = 0$ (4.15c).
IV	$\mathfrak{s} > 3\mathfrak{a}$	$\mathfrak{Cof}\,\lambda_1 \cos\lambda_2 - 1 = \frac{1}{2}\mathfrak{Sin}\,\lambda_1 \sin\lambda_2 \left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} - \lambda_2^2}{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} + \lambda_1^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} + \lambda_1^2}{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} - \lambda_2^2}\right\}$ (4.16a),
	$\mathfrak{s} = 3\mathfrak{a}$	$\mathfrak{m}^2 = 3\mathfrak{b}$ . . . . (4.16b),
	$\mathfrak{s} < 3\mathfrak{a}$	$1 - \cos\lambda_1' \cos\lambda_2 = \frac{1}{2}\sin\lambda_1' \sin\lambda_2 \left\{\frac{\lambda_1'}{\lambda_2}\frac{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} - \lambda_2^2}{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} - \lambda_1'^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1'}\frac{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} - \lambda_1'^2}{\mathfrak{m}^2 - 3\mathfrak{b} - \lambda_2^2}\right\}$ (4.16c).

Die Kippbedingungen für $\mathfrak{b} = 0$ erhalten wir zufolge von $u = 0$ in den Gl. (4.27) durch einen Grenzübergang $\lambda_1 \to 0$ bzw. $\lambda_1' \to 0$ in der Form

$$\lambda_2 = \mathrm{tg}\,\lambda_2 \qquad \text{für Fall II} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4.14\text{d}),$$

$$2(\cos\lambda_2 - 1) + \lambda_2 \sin\lambda_2 = 0 \qquad \text{für Fall III} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4.15\text{d})$$

und

$$2(\cos\lambda_2 - 1) + \lambda_2 \frac{\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2 - \lambda_2^2}\sin\lambda_2 = 0 \qquad \text{für Fall IV} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4.16\text{d}).$$

Den beiden letzten Gleichungen sind die Nullstellen Null, 2π, 4π, 6π, … zugeordnet. — Wir bemerken, daß in den Fällen II, III und IV die Kippbedingungen für $\lambda_1' = \lambda_2$ wohl identisch erfüllt sind, daß aber zu $\lambda_1' = \lambda_2$ keine von Null verschiedene Auslenkungen gehören.

5. Strenge Lösungen. Für die ziffernmäßige Auswertung wählen wir als Hauptveränderliche $\mathfrak{m}^2$ und $\mathfrak{b}$, als Parameter $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ und

$$c = \mathfrak{m}^2/\mathfrak{s} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5.1\text{a}).$$

Da praktisch die Rippen verhältnismäßig schmal sind, ist $\mathfrak{a}$ klein gegen $\mathfrak{b}$, der Einfluß von $\mathfrak{a}$ gegenüber dem von $\mathfrak{b}$ also gering. $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ bleibt konstant, wenn $\mathfrak{b}$ durch Wahl verschieden großer, aber geometrisch ähnlicher Rippenquerschnitte geändert wird. c kennzeichnet die Art der Belastung eines speziellen Rostes. Bei der Ausrechnung der zu $\mathfrak{m}^2$ und c gehörigen Werte M,

S_1 und S_2 ist der aus den Definitionsgleichungen (2.12) und (2.13) folgende Zusammenhang

$$c = \frac{2\,M}{(S_1 + S_2)\,l}\,\frac{M\,l}{C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.1\,\mathrm{b})$$

zu beachten.

Da $\mathfrak{m}^2$ von drei Parametern — $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ und c — abhängt und weil für die praktisch wichtigen und interessanten Bereiche dieser Parameter gesichtetes Zahlenmaterial noch nicht vorliegt, wurde die ziffernmäßige Auswertung vorläufig nur in beschränktem Maße und für wenige Kombinationen der Parameter durchgeführt. Als solche sind gewählt: $c = \infty$ (reine Biegelast), $c = 1$ und $c = 0{,}1$ (vorwiegende Druckbeanspruchung), $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ gleich Null und 1/10. In einem Schaubild für Fall I, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$, wurde auch noch $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1/100$ und $c = 0{,}01$ berücksichtigt (siehe Abb. 5). Die Auswertung ist in erster Linie für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ durchgeführt. Da durch die Verknüpfung $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ die Möglichkeit verlorengeht, für $\mathfrak{a} \neq 0$ aus dem Schaubild für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ einen Wert $\mathfrak{m}^2$ für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ bei $\mathfrak{b}/3$ zu finden, werden für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ einige $\mathfrak{m}^2$-Werte zum Vergleich angegeben. Die Schaulinien sind in einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem eingetragen, mit $\mathfrak{m}^2$ als Ordinate und $\mathfrak{b}$ als Abszisse. $\mathfrak{b}$ läuft von 1 bis 1000. Als Zwischenwerte wurde für $\mathfrak{s} > 3\,\mathfrak{a}$ 10 und 100, für $\mathfrak{s} < 3\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{s} = 3\,\mathfrak{a}$ und die hier aus Platzgründen nicht näher besprochenen Ritzschen Näherungen noch 2, $\sqrt{10}$, 5, 10, 20, $\sqrt{1000}$, ... angenommen.

Fall I. Es sei, wie man aus der Gl. (4.13) ersieht,

$$\mathfrak{m}_0^2 = \mathfrak{m}^2\,(\mathfrak{s} = 0) = \left(1 + \frac{3\,\mathfrak{b}}{(n\,\pi)^2}\right)((n\,\pi)^2 + 3\,\mathfrak{a}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.2)$$

und

$$\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}\,(\mathfrak{m}^2 = 0) = (n\,\pi)^2 + 3\,\mathfrak{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.3).$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{m}^2 = \mu\,\mathfrak{m}_0^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} = \nu\,\mathfrak{s}_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.4),$$

so ergibt sich in Verbindung mit der Kippbedingung nach Gl. (4.13)

$$\mu + \nu = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.5),$$

ein bei anderen Problemen, wo auch zwei Einflüsse zusammenwirken, die für sich allein neutrales, elastisches Gleichgewicht herbeiführen können, ebenso zu findender Zusammenhang. Führen wir in die Gl. (4.13) c und $\mathfrak{m}_0^2$ ein, so erhalten wir die zur Ziffernrechnung sehr einfache Beziehung

$$\mathfrak{m}^2 = \frac{\mathfrak{m}_0^2}{\frac{1}{c}\,(1 + 3\,\mathfrak{b}/(n\,\pi)^2) + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.6).$$

Man erkennt, daß für große Werte von c je nach der Größe von $\mathfrak{b}$ der niedrigste Wert von $\mathfrak{m}^2$ verschiedenen n, also Wellenzahlen von η und β, zukommt. Setzen wir zwei verschiedenen Wellenzahlen n_1 und n_2 zukommende Werte $\mathfrak{m}^2$ einander gleich, so erhalten wir nach kurzer Rechnung mit $\mathfrak{b}_s$ als Abszisse des Schnittpunktes zweier Schaulinien, die n_1 bzw. n_2 entsprechen, die Formel

$$\mathfrak{b}_s^2 + \mathfrak{b}_s\,\frac{\pi^2}{3}\,\frac{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}/\mathfrak{a} - c}\,(n_1^2 + n_2^2) + \frac{\pi^4}{9}\,\frac{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\,(1 + c)}{\mathfrak{b}/\mathfrak{a} - c}\,n_1^2\,n_2^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.7),$$

womit wir die Grenze zweier Bereiche n_1 und n_2 angeben können. Im besonderen wird für Biegung allein, also bei $c = \infty$

$$\mathfrak{b}_s = \frac{\pi^2}{3}\,n_1\,n_2\,\sqrt{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.8).$$

Von Interesse ist auch, für welchen Zusammenhang zwischen c und $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ die Grenze der Bereiche $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$ bei $\mathfrak{b} = 1000$ liegt, dem in Betracht gezogenen Höchstwert von $\mathfrak{b}$. Es ergibt sich aus Gl. (5.7) für $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1$, 1/10, 1/100, 1/1000, Null der Reihe nach c 1,0165, 10,170, 102,09, 1062,49, $-$23099,84. Für $c = 1$, 0,1 ist also in dem betrachteten Bereich $\mathfrak{m}^2\,(n = 1)$ maßgebend. Der negative Wert von c bei $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ gleich Null entspricht einer kleinen Zugkraft neben $\mathfrak{m}^2$. Für $c \leq \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ schneiden sich zwei zu verschiedenen Werten n aber gleichen $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ und c gehörige Schaulinien im System $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{b}$ für $\mathfrak{b} > 0$ überhaupt nicht bzw. erst im Unendlichen, wie man aus der Gl. (5.7) ersieht. Aus Gl. (4.13) ergibt sich weiters mit Gl. (5.1) für $\mathfrak{b} = \infty$ die Formel

$$\mathfrak{m}^2 = c\,(3\,\mathfrak{a} + /\,(n\,\pi)^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.9).$$

Für $c > \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ besteht eine Einhüllende der zu gleichem $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ und c aber verschiedenen n gehörigen Kurven. Sie lautet

$$\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s} = 3\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 2\sqrt{3\,\mathfrak{b}\,(3\,\mathfrak{a} - \mathfrak{s})} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.10).$$

Da in der gewählten Darstellung mit $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ als Parameter $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ Null wird, ist die Einhüllende nur für $\mathfrak{s} \leq 0$ reell. Da negative Werte $\mathfrak{s}$, Zugkräften entsprechend, nicht in Betracht gezogen werden, erscheint die Einhüllende nur für $c = \infty$. Nach Einführung von $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ in (5.10) wird dann

$$\mathfrak{m}^2 = 3\,\mathfrak{b}\,(1 + \mathfrak{a}/\mathfrak{b} + 2\sqrt{\mathfrak{a}/\mathfrak{b}}) \qquad (5.11),$$

die Einhüllende ist also zugleich gemeinsame Tangente und geht mit einer von $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ abhängigen Neigung durch den Ursprung. Aus der Herleitung erkennen wir, daß die Formel (5.9) eine obere, die Formel (5.11) eine untere Grenze angibt. — Die nach der Formel (5.6) berechneten $\mathfrak{m}^2$-Werte sind in den Schaubildern Abb. 5 und Abb. 6 eingetragen, Ziffernwerte sind in der Tabelle (5.1) sowohl für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ als auch für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ enthalten. Bemerkenswert ist, daß der Unterschied zwischen den $\mathfrak{m}^2$-Werten für $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ und denen für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ um so geringer wird, je kleiner c wird.

Die Kippbedingungen der Fälle II und IV wurden zum größten Teil unter Heranziehung Ritzscher Näherungen — über welche an anderer Stelle berichtet werden wird — durch Probieren aufgelöst. Weil hier die Schärfe der Ritzschen Näherungen über den ganzen Bereich von $\mathfrak{b}$ mit einem tragbaren Aufwand nicht sehr hochgetrieben werden kann, mußte das Probieren mit verschiedenen $\mathfrak{m}^2$ öfters wiederholt werden und zwar so lange, bis die letzte Ziffer eines angegebenen Wertes von $\mathfrak{m}^2$ nicht mehr geändert wird. Da mindestens vier Ziffern angegeben werden, ist $\mathfrak{m}^2$ mindestens auf $\pm 5.10^{-4}$ seines Wertes genau bestimmt[7]). Für $c = 1$ und $c = 0{,}1$ wurde mit einem gewählten Wert $\mathfrak{m}^2$ λ_1 und λ_2 nach den Gl. (4.8a) berechnet. Für $c = \infty$ erweist es sich als vorteilhafter, etwa den Wert λ_2 aufzusuchen, welcher die Kippbedingung erfüllt und $\mathfrak{m}^2$ im Nachhinein zu berechnen. Man erhält aus den Bestimmungsgleichungen für λ_1' und λ_2 allgemein

$$\mathfrak{m}^2 = 3\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \lambda_1'^2 + \lambda_2^2 \qquad (5.12)$$

und

$$\lambda_1'^2 \lambda_2^2 = 9\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \qquad (5.13).$$

Untersucht man, für welchen Zusammenhang zwischen λ_1' und λ_2 $\mathfrak{m}^2$ ein Minimum wird, so erhält man wieder die Einhüllende des Falles I für $c = \infty$, Gl. (5.11). Die Minimumsbedingung lautet

$$\lambda_1' = \lambda_2 \qquad (5.14),$$

die — wie schon erwähnt wurde — in den Fällen II, III und IV auf nicht von Null verschiedene Auslenkungen führt.

Fall II. Dem ersten Schnittpunkt von $\mathfrak{F}_1'$ und $\mathfrak{F}_2$ in der Gl. (4.14c) entspricht $\lambda_1' = \lambda_2$. Nach obigem tritt erstmalig neutrales, elastisches Gleichgewicht beim zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_2$ ein. Trägt man die λ_2-Werte dieses Schnittpunktes über $\mathfrak{b}$ auf, so zeigt der Kurvenverlauf beispielsweise für $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1/10$ bei $\mathfrak{b} = 18{,}7$ einen Knick, der in dem Vorzeichenwechsel von $\mathfrak{F}_1'$ begründet ist. Man erkennt auch, daß für $\mathfrak{b} < 18{,}7$ η im Intervall $0 < \xi < 1$ einen Wendepunkt hat, für $\mathfrak{b} > 18{,}7$ deren zwei. (Siehe auch die Abb. 10. Die mit η'' angeschriebenen Kurven entsprechen dem exakten Wert, die mit η''_{R2} angeschriebenen einer Ritzschen Näherung.) — Die $\mathfrak{m}^2$-Werte sind in der Tabelle (5.2) angegeben und in der Abb. 6 eingetragen. Dort ist für $c = \infty$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/10$ auch der dem dritten Schnittpunkt $\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_2$ entsprechende $\mathfrak{m}^2$-Wert eingetragen. Man sieht, daß sich die zum zweiten und die zum dritten Schnittpunkt $\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_2$ gehörigen Kurven nicht wie im Fall I überschneiden. Die Annäherung dieser $\mathfrak{m}^2$-Werte an die Einhüllende des Falles I ist eine sehr große. Der Unterschied ist bei $\mathfrak{b} = 100$ 2,04%, bei $\mathfrak{b} = 1000$ 0,187% für die erste kritische Last, für die zweite kritische Last sind die Hundertsätze 7,34% und 0,769%. Für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ wurden bei $\mathfrak{b} = 100$ $\mathfrak{m}^2$-Werte berechnet, die in der Tabelle (5.2) in Klammern stehen.

Fall III. Aus den schon erwähnten Gründen wird die Auswertung der recht komplizierten Kippbedingungen dieses Falles vorderhand zurückgestellt. Zum Vergleich mit den Lösungen der anderen Fälle ist in der Abb. 6 eine Ritzsche Näherung eingetragen, die bei $\mathfrak{b} = 0$ die exakten Werte liefert und die bei $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = \infty$, $c = 1$ und $c = 0{,}1$ einen größten Fehler von 15,6% aufweist. Auf diesen Fehler kann an Hand der Formel (5.9) geschlossen werden, weil bei der Auswertung der Kippbedingung (4.14a) des Falles II für $\mathfrak{b} \to \infty$ die Werte $c\,(3\,\mathfrak{a} + 20{,}19)$ angenähert werden. Der zweite Summand in der Formel (5.9) ist also aus Analogiegründen allgemein $(\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{s})\,(\mathfrak{a} = 0,\ \mathfrak{b} = 0)$, im Fall III demnach $4\,\pi^2$. Die Ritzsche Näherung für $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = \infty$ ist $c\,(45{,}625)$, woraus sich der genannte Fehler ergibt. Die Kennzeichnung als größter Fehler erfolgt in Analogie zu den Fehlern der Ritzschen Näherungen der anderen Fälle.

[7]) Bei den Zifferurechnungen wurden die bekannten „Sieben- und mehrstelligen Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen usw." von Keiichi Hayashi mit besonderem Vorteil verwendet.

Fall IV. Setzen wir in der Gl. (4.16c), für kleine λ_1' bzw. λ_2

$$1 - \cos\lambda_1' \cos\lambda_2 \approx \frac{1}{2}(\lambda_1'^2 + \lambda_2^2) \quad \text{und} \quad \sin\lambda_1' \sin\lambda_2 \approx \lambda_1' \lambda_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.15),$$

so verbleibt

$$\lambda_1' = \lambda_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.16).$$

λ_1' und λ_2 sind klein, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ klein sind (siehe Gl. (5.13)). Da $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ Null wird, nähert sich $\mathfrak{m}^2$ für $\mathfrak{b} \to 0$ und $c = \infty$ asymptotisch den Werten nach Gl. (5.11), wird also für $\mathfrak{b} = 0$ Null, zum Unterschied von den anderen Fällen, die für $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = 0$ endliche Lösungen haben. So ist z. B. für $\mathfrak{a} = 0{,}001$, $\mathfrak{b} = 0{,}01$ $\mathfrak{m}^2$ für $\lambda_1' = \lambda_2$ 0,05197, an der zweiten Nullstelle von (4.16c) 0,05228. Für $\mathfrak{b} = 1$, $\mathfrak{a} = 0{,}1$ liegt der $\mathfrak{m}^2$-Wert knapp unterhalb des Wertes für Fall I. Bei $\mathfrak{b} = 5$, $\mathfrak{a} = 0{,}5$ wird bereits die asymptotische Lösung (5.11) bis auf einen praktisch verschwindenden Unterschied erreicht. Bei $\mathfrak{b} = 20$, $\mathfrak{a} = 2$ ist dieser Unterschied nur mehr in der 9. Stelle und ist dann weiter wegen der Genauigkeitsschranke der Rechnung, die hier in der Größenordnung von 0,000 000 002 liegt, nicht mehr zu erfassen. Für $\mathfrak{a} = 0$ ist die Gl. (5.11) in der Form $\mathfrak{m}^2 = 3\,\mathfrak{b}$ die Lösung. — Für $c < \infty$ wird $\mathfrak{m}^2$ wieder mit $\mathfrak{b} \to 0$ Null, mit steigendem $\mathfrak{b}$ werden die Lösungen des Falles I von unten her angenähert und für $\mathfrak{b} = \infty$ asymptotisch erreicht. Ziffernwerte von $\mathfrak{m}^2$ für Fall IV sind in der Tabelle (5.3) angegeben und in der Abb. 6 eingetragen.

6. Bemerkungen zur praktischen Anwendung. Die bisher vorliegenden Ergebnisse können zum Vergleich zweier Roste mit Bezug auf die Höhe ihrer Kippgrenze und zur Nachrechnung der „Kippsicherheit" eines Rostes verwendet werden. In letzterem Fall werden die Lasten an der Kippgrenze zu jenen, bei welchen in den Holmen die Anstrengung erreicht wird, die die sicheren Lasten begrenzt, ins Verhältnis gesetzt. Die notwendige Höhe der so definierten rechnerischen Kippsicherheit müßte erst statistisch durch Nachrechnung möglichst vieler, einschlägiger Fälle festgesetzt werden, weil vorderhand die Kippgrenze für die Belastungsarten des Rostes, die der statischen Berechnung zugrunde gelegt werden, noch nicht erhoben werden kann.

Es besteht die Möglichkeit, aus den in der Abb. 5 und 6 angegebenen Kurven $c =$ konst. für Näherungen solche für andere Werte von c ohne besondere Rechnung herzuleiten. Man macht sich den Umstand zunutze, daß im logarithmischen $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{b}$-Schaubild die Abstände der Kurven $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1/10$, $\mathfrak{a} = 0$, $(\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1/100)$ voneinander für gleiches $\mathfrak{b}$ nahezu unabhängig von c sind, wenn man Kurven, denen im η-Verlauf die gleiche Zahl von Wendepunkten zukommt, vergleicht. Im Fall I sind die Kurvenabstände für gleiches $\mathfrak{b}$ exakt dieselben. Wir haben

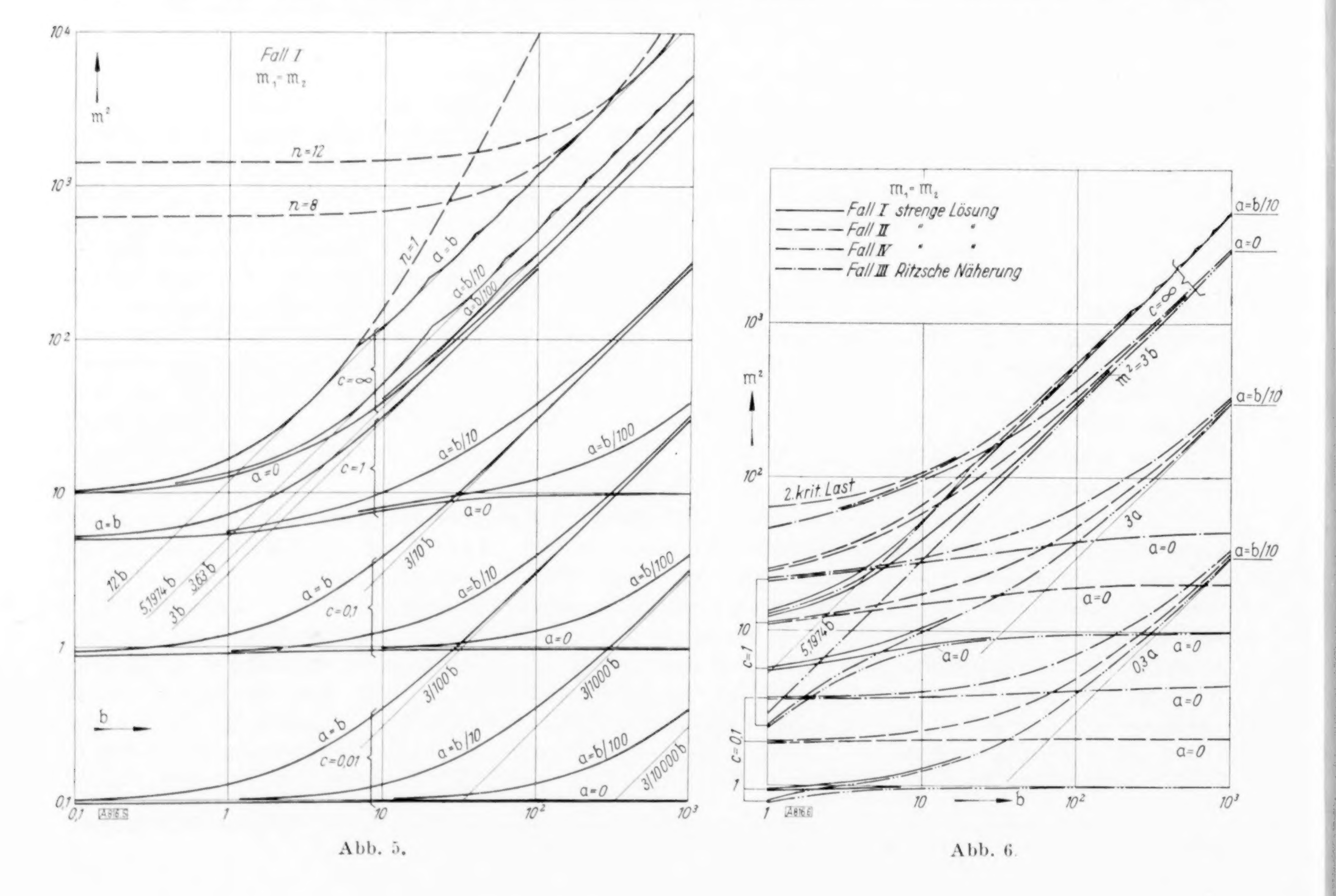


Abb. 5. Abb. 6.

Tabelle 5.1, $\mathfrak{m}^2$ für Fall I.

$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} = 0$			$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/10$		
		$c = \infty$	$c = 1$	$c = 0,1$	$c = \infty$	$c = 1$	$c = 0,1$
$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$	0	9,8696	4,9348	0,8972	9,8696	4,935	0,8972
	1	12,8696	5,585	0,9167	13,261	5,755	0,9445
	10	39,8696	7,911	0,96311	51,989	10,316	1,25587
	100	309,8696	9,565	0,983827	520,13 [1])	38,639	3,974302
	1000	3009,8696	9,837	0,9866369	5198,9 [2])	308,857	30,976803
	$\to \infty$	$\to 3\,\mathfrak{b} + \pi^2$	$\to \pi^2$	$\to \pi^2/10$	$\to 5{,}197367\,\mathfrak{b}$	$\to 3/10\,\mathfrak{b} + \pi^2$	$\to 3/100\,\mathfrak{b} + \pi^2/10$
$\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$	0	9,8696	4,9348	0,8972	9,8696	4,9348	0,8972
	1	10,8696	5,1727	0,9048	11,2000	5,3300	0,9323
	10	19,8696	6,5942	0,9403	25,9092	8,5985	1,2261
	100	109,8696	9,05609	0,9782	245,469 [3])	36,5833	3,9515
	1000	1009,8696	9,7741	0,9860	2403,945 [4])	306,8705	30,9567
	$\to \infty$	$\to \mathfrak{b} + \pi^2$	$\to \pi^2$	$\to \pi^2/10$	$\to 2{,}39545\,\mathfrak{b}$	$\to 3/10\,\mathfrak{b} + \pi^2$	$\to 3/100\,\mathfrak{b} + \pi^2/10$

Fußnote	[1])	[2])	[3])	[4])
Wellenzahl	3	10	2	7
$\mathfrak{m}^2$ bei $n = 1$	1251,77	94475,86	443,833	31706,22

Tabelle 5.2, $\mathfrak{m}^2$ für Fall II.

$\mathfrak{b}$	c	$\mathfrak{a} = 0$	$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/10$
0	∞	20,1907	20,1907
	1	10,0954	10,0954
	0,1	1,8355	1,8355
1	∞	24,964	25,336
	1	11,186	11,334
	0,1	1,8625	1,8960
2	∞	29,369	30,237
$10^{\frac{1}{2}}$	∞	34,146	35,724
5	∞	41,162	44,136
10	∞	58,515	66,649
	1	15,141	17,385
	0,1	1,954	2,245
20	∞	90,435	114,76
$10^{\frac{3}{2}}$	∞	126,21	174,07
50	∞	181,98	270,85
100	∞	332,58	530,30
		(131,43) *)	(249,60) *)
	1	19,094	47,485
		(17,652) *)	(43,814) *)
	0,1	2,008	4,991
		(1,991) *)	(4,948) *)
200	∞	632,89	1049,55
$10^{\frac{5}{2}}$	∞	981,69	1653,36
500	∞	1533,09	2608,53
1000	∞	3033,15	5207,11
	1	20,07	318,14
	0,1	2,018	31,999
∞	1	20,19	
	0,1	2,019	

*) $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$

Tabelle 5.3, $\mathfrak{m}^2$ für Fall IV.

$\mathfrak{b}$	c	$\mathfrak{a} = 0$	$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/10$
0	∞	0	0
	1	0	0
	0,1	0	0
1	∞	3	12,942
	1	2,379	2,443
	0,1	0,7689	0,7923
2	∞	6	16,052
$10^{\frac{1}{2}}$	∞	9,4868	19,706
5	∞	15	25,987
10	∞	30	51,974
	1	7,604	9,9002
	0,1	0,9589	1,2503
20	∞	60	103,947
$10^{\frac{3}{2}}$	∞	94,868	164,355
50	∞	150	259,868
100	∞	300	519,74
	1	9,562 *)	38,630
	0,1	0,9838	3,9742
200	∞	600	1039,47
$10^{\frac{5}{2}}$	∞	948,68	1643,55
500	∞	1500	2598,68
1000	∞	3000	5197,37
	1	9,8373	308,856
	0,1	$0{,}9866_4$	$30{,}9768_0$
∞	1	π^2	
	0,1	$\pi^2/10$	

*) für $\mathfrak{m}_1 = -\mathfrak{m}_2$ 9,0281

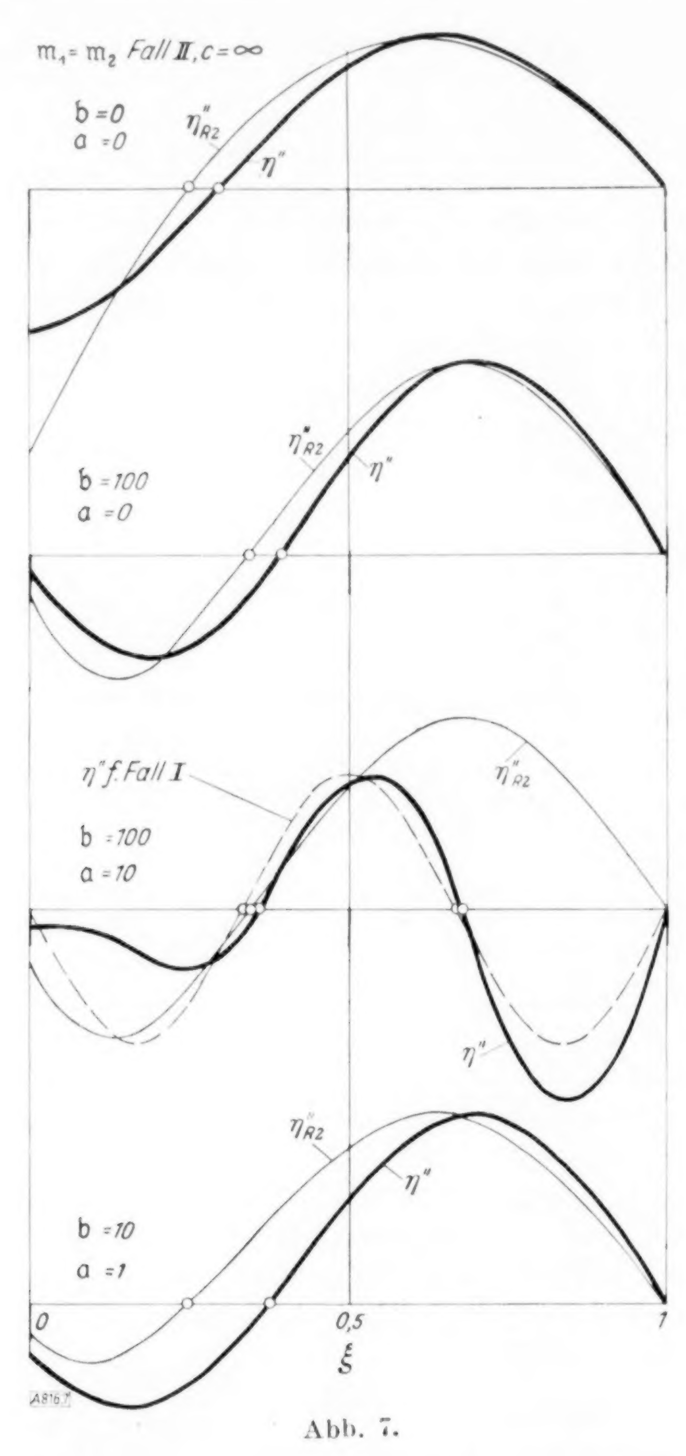


Abb. 7.

also nur über einer ähnlich eingezeichneten Grundkurve $\mathfrak{a} = 0$ — mit Asymptoten $\frac{c}{c+1}\pi^2$, $\frac{c}{c+1}20{,}19$, $\frac{c}{c+1}4\pi^2$ für $\mathfrak{b} = 0$ und $c\pi^2$, $c\,20{,}19$, $c\,4\pi^2$ für $\mathfrak{b} = \infty$ — die besagten Abstände aufzutragen. Die angegebenen Asymptotenhöhen entsprechen der Reihe nach den Fällen I, II, III. Im Falle IV empfiehlt es sich, die erwähnte Grundkurve für $\mathfrak{a} = 0$ nach einer Ritzschen Näherung festzulegen. 816

Schrifttum.

[1] Bauvorschriften für Flugzeuge. Heft 1. Nachrichten für Luftfahrer. Berlin 1935.
[2] A. Teichmann: Zur Berechnung auf Knickbiegung beanspruchter Flugzeugholme. Luftfahrtforschung 1931, Bd. 9.
[3] C. Schmieden: Knickbiegung von Flugzeugholmen bei linearer veränderlicher Längskraft. Luftfahrtforschung 1935, Bd. 13.
[4] Der Verfasser: Über die Kipplasten eines geraden Stabes, der gegen Querschnittsdrehung elastisch gestützt ist. Dissertation DTH.-Brünn 1933.
[5] Der Verfasser: Zur Stabilität eines auf Druck und Biegung beanspruchten, an den Enden elastisch eingespannten Trägers. Mitt. d. Hauptvereines Deutscher Ingenieure in der ČSR., 1934.
[6] Der Verfasser: Über die Kipp-Stabilität von Holm-Rippenrosten. ZAMM 1937.
[7] H. Reissner: Neue Probleme aus der Flugzeugstatik. ZFM 1926.
[8] K. Thalau: Über die Verbundwirkung von Rippen in freitragenden, zweiholmigen und verspannungslosen Flugzeugflügen. 52. DVL-Bericht, ZFM 1925.
[9] Love-Timpe: Lehrbuch der Elastizität.
[10] K. Karas: Kritische Drehzahlen stetig mit Masse belegter Wellen mit Längsbelastung und Kreiselwirkung. Ingenieur-Archiv 1930.
[11] R. Grammel: Kritische Drehzahlen mit Kreiselwirkung. ZVDI 1929.
[12] K. Federhofer: Neue Beiträge zur Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Abt. IIa, 140. Bd., 1931.

Eigenschwingungen in brennenden Gasgemischen*).

Von *Gottfried Guderley* in Braunschweig.

I. Einleitung. Nielsen beschreibt in seiner Dissertation[1]) folgenden Versuch: In einem abgeschlossenen zylindrischen Gefäß von etwa 80 cm Länge und 20 cm Durchmesser befindet sich brennbares Gasgemisch. An einem Ende des Gefäßes ist eine Einrichtung zur elektrischen Zündung, am anderen Ende ein Quarz zur piezoelektrischen Druckmessung angebracht. Es wird gezündet und der Druckverlauf während der Verbrennung als Funktion der Zeit aufgezeichnet. Das Ergebnis der Versuche ist überraschend. Dem Druckanstieg, wie er nach dem Fortschreiten der Verbrennung zu erwarten ist, überlagern sich Eigenschwingungen der brennenden Gassäule, deren Amplitude meist ziemlich stark anwächst, teilweise, besonders in den höheren Frequenzen, aber auch wieder ein Absinken zeigt. Diese Schwingungen beeinflussen die Verbrennungsgeschwindigkeit. Nielsen brachte eine künstliche Dämpfung an und erhielt dann eine verzögerte Verbrennung. Für den Techniker ist diese letzte Erscheinung und vielleicht auch die Schwingung selbst von Interesse, man denke an die Vorgänge im Vergasermotor. Bei der physikalischen Deutung dieser Erscheinungen entstehen folgende Fragen: 1. Wie werden diese Schwingungen hervorgerufen, und wie ist ihr Anwachsen und Abfallen zu erklären? 2. Wie kommt der Einfluß auf die Verbrennungsgeschwindigkeit zustande? Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag zur Lösung der ersten Frage liefern; folgendes Problem wird theoretisch behandelt: In einem abgeschlossenen Gefäß befindet sich brennendes Gasgemisch. Die Verbrennungsgeschwindigkeit sei klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit. Es soll angenommen werden, daß ein periodisch schwankender Druck an der Verbrennungsstelle auch in der Verbrennungsgeschwindigkeit periodische Schwankungen hervorruft, der Zusammenhang dieser Schwankungen in der Verbrennungsgeschwindigkeit mit den Druckschwankungen bleibt hinsichtlich Amplitude und Phasenverschiebung wählbar. Hierdurch ist jeder physikalische Einfluß des Drucks auf die Verbrennungsgeschwindigkeit erfaßt, z. B. auch der Fall druckunabhängiger Verbrennungsgeschwindigkeit. Zu einem beliebigen Zeitpunkt mögen die Teilchen vorgegebene Lagen und Geschwindigkeiten haben. Diese seien so gewählt, daß die Abweichungen von den Lagen ausgeglichenen Drucks klein sind und klein bleiben. Es soll nun berechnet werden, welche Bewegungen die Teilchen ausführen. Dabei interessiert insbesondere das Schicksal der Eigenschwingungen, aus denen die Anfangsabweichungen bestehen.

II. Bezeichnungen. Die Länge des zylindrischen Gefäßes sei l, seine Achse liege waagerecht. Links werde gezündet. Die Brennfläche wandere als Ebene senkrecht zur Zylinderachse von links nach rechts. Alle Teilchen auf einem Querschnitte mögen sich gleichartig verhalten. Aus der Gasmasse sei ein Zylinder vom Querschnitte 1 herausgeschnitten; auf diesen allein beziehen sich die weiteren Untersuchungen. Wo eine Unterscheidung notwendig ist, werden Teilchen links der Brennfläche (verbrannte Teilchen) durch den Index l, Teilchen rechts der Brennfläche (unverbrannte Teilchen) durch den Index r gekennzeichnet. Werte, die an der Verbrennungsfront gelten, erhalten den Index v. Als Verbrennungsgeschwindigkeit sei die je Zeiteinheit verbrennende Masse definiert. Es ist wahrscheinlich, daß die Verbrennungsgeschwindigkeit durch den Druck an der Verbrennungsstelle beeinflußt wird. Herrscht dort ein periodisch schwankender Druck, so wird auch die Verbrennungsgeschwindigkeit periodische Schwankungen um einen ausgeglichenen Wert zeigen. Dabei sollen auch Schwankungen mit wechselnder Frequenz und veränderlicher Amplitude als periodisch bezeichnet werden. u bezeichne den ausgeglichenen, u_s den wirklichen Wert der Verbrennungsgeschwindigkeit. u sei vorgegeben. Wir führen substantielle Koordinaten derart ein, daß x die Masse des Gases ist, die sich zwischen dem linken Ende des Zylinders und dem betrachteten Teilchen befindet. Ist u als Funktion der Zeit gegeben, so kann die Lage der Verbrennungsfront im Material, die bei diesem ausgeglichenen Verlauf der Verbrennungsgeschwindigkeit eintreten würde, berechnet werden. Sie sei x_v. Es ist $u = d\,x_v/d\,t$. Zur Verbrennungsgeschwindigkeit u_s gehört als materielle Lage der Verbrennungsfront x_{vs}. Es ist $u_s = d\,x_{vs}/d\,t$. Es sei $\Delta u = u_s - u$ und $\Delta x_v = x_{vs} - x_v$.

Die Drucke seien p, die Temperaturen T, die spezifischen Volumina v. Der ausgeglichene Zustand am Anfang sei gegeben durch die konstanten Werte p_0, v_0, T_0. Ein Teilchen werde adiabatisch von seinem Zustand in einem beliebigen Zeitpunkt auf den Druck p_0 gebracht; sein spezifisches Volumen bei diesem Drucke sei v_{l0} bzw. v_{r0} je nachdem, ob das Teilchen

*) Von der Technischen Hochschule Dresden zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

[1]) Nielsen: Der Einfluß der Eigenschwingungen brennender Gasgemische auf ihre Verbrennungsgeschwindigkeit. (Erschienen in der Zeitschrift „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" 4. Band, Heft 6.)

dem Verbrannten oder dem Unverbrannten angehört. Ist Wärmeübergang vorhanden, so ist v_{l_0} außer von x noch von t abhängig; v_{r_0} ist meist gleich v_0, da im Unverbrannten der Wärmeaustausch und die Wärmeverluste gering sind. Verbrennt ein Teilchen ohne Wärmeverluste unter dem konstanten durch adiabatische Kompression erreichten Drucke p_v, so sei v_{la} der dabei erreichte Wert v_{l_0}. Die Werte v_{l_0} und v_{la} werden durch die Schwingungen beeinflußt. Mit v_{l_0} und v_{la} sollen nur die bei schwingungsfreier Verbrennung entstehenden Werte bezeichnet werden, bei Vorhandensein von Schwingungen wird der Index s beigefügt.

Die Lage eines Teilchens im Raum wird beschrieben durch seine Entfernung w vom linken Ende des Gefäßes. Halten wir bei einem Vorgange ohne Eigenschwingungen (die Verbrennungsgeschwindigkeit ist dann u, die Lage der Verbrennungsfront x_v) die Verbrennung in einem beliebigen Zeitpunkte an und denken uns adiabatisch Druckausgleich hergestellt, so ergibt sich ein Druck, der mit p_m bezeichnet werden soll. Die zugehörigen Lagen der Teilchen seien w_m. Tun wir das gleiche bei einem Verbrennungsablauf mit Schwingungen, so erhalten wir p_{ms} und w_{ms}. Es sei

$$\varDelta p_m = p_{ms} - p_m; \qquad \varDelta w_m = w_{ms} - w_m,$$

y wird durch die Gleichung definiert

$$y = w - w_m,$$

y ist die Verschiebung eines Teilchens aus seiner augenblicklichen Mittellage w_m.

g_h seien die Verschiebungen y für die h-te Eigenschwingungsform. Natürlich ändert sich die Eigenschwingungsform mit der Lage der Verbrennungsfront. ν_h sei die zugehörige Kreisfrequenz. K sei die kinetische Energie, Π die potentielle Energie. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen sei im Verbrannten $\varkappa_l$, im Unverbrannten $\varkappa_r$. Für die numerische Auswertung wird $\varkappa$ als konstant angenommen. Weiter führen wir ein:

$$\xi = \frac{x \cdot v_0}{l}; \qquad \xi_v = \frac{x_v \cdot v_0}{l}$$

$$V_l = \frac{v_{l0}}{v_0}; \qquad V_{ls} = \frac{v_{l0s}}{v_0}; \qquad V_{las} = \frac{v_{las}}{v_0}; \qquad V_r = \frac{v_r}{v_0} \text{ usw.}$$

$$\overline{U} = \frac{u \cdot v_0}{l}; \qquad \overline{U}_s = \frac{u_s \cdot v_0}{l}$$

$$P = \frac{p}{p_0}; \qquad P_m = \frac{p_m}{p_0}; \qquad P_{ms} = \frac{p_{ms}}{p_0}.$$

III. Differentialgleichungen, Rand- und Übergangsbedingungen. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dabei ist $p = p(v, V_l)$ bzw. $p = p(v, V_r)$, $v = \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $w = w(x, t)$. V_l und V_r sind im allgemeinen ebenfalls von x und t abhängig. Die w genügen folgenden Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für} & x = 0 & \text{ist} \quad w = 0, \\ \text{für} & x = x_v & \text{ist} \quad w_{lv} = w_{rv}, \\ \text{für} & x = l/v_0 & \text{ist} \quad w = l \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die zweite Bedingung enthält die Kontinuitätsgleichung für die Übergangsstelle. Es sei für einen bestimmten Zeitpunkt $w_{lv} = w_{rv}$ der Wert w an der Verbrennungsstelle.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{lv}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{rv}$$

seien die zugehörigen Differentialquotienten. Drückt man die Lage der Verbrennungsfront nach der Zeit dt durch die Größen im Verbrannten und im Unverbrannten aus und setzt beide Ausdrücke einander gleich, so ergibt sich

$$w_{lv} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv} \cdot dt + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot u_s \cdot dt = w_{rv} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} \cdot dt + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{rv} \cdot u_s \cdot dt$$

$$u_s \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{lv} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{rv}\right\} + \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv}\right\} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Diese Beziehung ist allein aus der zweiten Übergangsbedingung hergeleitet und gilt für alle Funktionen, die dieser Bedingung genügen.

Eine weitere Beziehung liefert der Impulssatz für die Verbrennungsstelle. Ein Teilchen, in dem die Verbrennung gerade fortschreitet, sei herausgeschnitten. Links herrscht der Druck p_{lv}, rechts sei er p_{rv}, die Geschwindigkeiten sind $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}$ und $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv}$. Die Änderung der Bewegungsgröße des herausgeschnittenen Teilchens wird dadurch hervorgerufen, daß die verbrannte Masse $u_s \cdot dt$, die anfangs die Geschwindigkeit $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv}$ hatte, nun die Geschwindigkeit $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}$ erhält. Daher

$$p_{rv} - p_{lv} - u_s \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4).$$

IV. Hamiltonsches Prinzip. Es ist bei unserem Problem zweckmäßig, die Lage der Teilchen durch die Eigenschwingungsformen darzustellen, mit anderen Worten, an Stelle der x die Koeffizienten der Eigenschwingungsformen als Koordinaten einzuführen. Den Übergang zu anderen Koordinaten vermitteln die Lagrangeschen Gleichungen. Daß diese auch hier gelten, soll durch das Hamiltonsche Prinzip gezeigt werden.

Für unseren Vorgang ist das Hamiltonsche Prinzip in folgender Weise zu formulieren. Wir betrachten verschiedene Bewegungsvorgänge, bei denen aber die Werte v_{los} und v_{ros} für jedes Teilchen und jeden Zeitpunkt übereinstimmen. Die v_{los} und v_{ros} repräsentieren die Entropie der betreffenden Teilchen, so mögen solche Vorgänge als Vorgänge mit gleicher Entropieverteilung bezeichnet werden. Es werden Bewegungen verglichen, die alle Teilchen von vorgegebenen Anfangslagen in vorgegebene Endlagen führen und den Bedingungen (2) genügen, außerdem seien die ersten Differentialquotienten überall bis auf die Verbrennungsstelle stetig. Die wirklich eintretende Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, daß die Variation des Ausdrucks $\int_0^t (\Pi - K)\,dt$ verschwindet. Es soll gezeigt werden, daß diese Formulierung auf die Differentialgleichung (1) und den Impulssatz an der Übergangsstelle (4) führt.

Die potentielle Energie sei folgendermaßen festgelegt. Zu einem Zeitpunkte seien die Lagen der Teilchen w; der Druck ist dabei im allgemeinen von Ort zu Ort verschieden. Stellt man adiabatisch Druckausgleich her, so entsteht der Druck p_{ms}, und die Teilchen erhalten die Lagen w_{ms}. Als potentielle Energie mag nun die Arbeit bezeichnet werden, die zu leisten ist, um ein Teilchen adiabatisch (d. h. bei konstantem v_{lo} bzw. v_{ro}) aus den Lagen w_{ms} in die Lagen w zu bringen. Die potentielle Energie je Masseneinheit ist daher

$$-\int_{v=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ms}}^{v=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)} p\,dv.$$

Im allgemeinen ist $p = p(v, v_{los})$ bzw. $p = p(v, v_{ros})$. Das Integral ist bei konstantem v_{los} bzw. v_{ros} zu bilden. Auch bei der Variation sollen die v_{los} und v_{ros} unverändert bleiben, daher unterscheidet sich das Integral für den variierten Zustand nur durch die obere Grenze; statt bis zu $v = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ist jetzt bis $v = \frac{\partial w}{\partial x} + \delta\frac{\partial w}{\partial x}$ zu integrieren. Die Variation wird folglich $-p \cdot \delta\frac{\partial w}{\partial x}$. Dann ist die Variation der gesamten potentiellen Energie

$$\delta\Pi = \int_0^{x_{vs}} \left(-p \cdot \delta\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot dx + \int_{x_{vs}}^{l/v_0} \left(-p\,\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot dx.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\delta\Pi = -(p_{lv} - p_{rv}) \cdot \delta w_v + \int_0^{l/v_0} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta w \cdot dx.$$

Hierbei ist $\int_0^{l/v_0} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta w \cdot dx$ als Abkürzung aufzufassen für $\int_0^{x_{vs}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta w\,dx + \int_{x_{vs}}^{l/v_0} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta w\,dx$. Es bedarf dieser Bemerkung, da p an der Verbrennungsstelle einen Sprung hat (vgl. Gl. (4)). Auch in anderen Fällen ist das Integral in diesem Sinne gebraucht.

Die kinetische Energie ist

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^{l/v_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Es ist

$$\int\limits_0^t K\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{l/v_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx\,dt$$

und

$$\delta\int\limits_0^t K\,dt = \int\limits_0^{l/v_0} dx\int\limits_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\cdot\delta\frac{\partial w}{\partial t}\cdot dt.$$

Wir integrieren partiell nach t. Dabei ist zu beachten, daß im Augenblick der Verbrennung $\frac{\partial w}{\partial t}$ unstetig ist. Für die Zeit, in der ein bestimmtes Teilchen noch nicht verbrannt war, erhält man an der oberen Grenze $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv}$, für die Zeit nach der Verbrennung erhält man an der unteren Grenze $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}$.

$$\delta\int\limits_0^t K\,dt = \int\limits_0^{l/v_0} dx_{vs}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\cdot\delta w_v - \int\limits_0^{l/v_0}\int\limits_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot\delta w\,dt\,dx.$$

Das erste Integral $\int\limits_0^{l/v_0} dx_{vs}\cdot\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\delta w_v$ bedeutet: es ist für ein Teilchen der im Augenblick seiner Verbrennung auftretende Ausdruck $dx\cdot\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\delta w_v$ zu bilden und alle diese Ausdrücke sind zu summieren. Der Integrand ist demnach eine Funktion von x_{vs}; deshalb ist dem dx der Index vs beigefügt.

Nun ist $x_{vs} = x_{vs}(t)$ und $dx_{vs} = u_s\cdot dt$. Damit erhält man

$$\int\limits_0^{l/v} dx_{vs}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\delta w_v = \int\limits_0^t dt\cdot u_s\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\cdot\delta w_v$$

und

$$\delta\int\limits_0^t K\,dt = \int\limits_0^t dt\cdot u_s\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\delta w_v - \int\limits_0^{l/v_0}\int\limits_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot\delta w\cdot dt\cdot dx.$$

Es ergibt sich

$$\delta\int\limits_0^t(\Pi - K)\,dt = \int\limits_0^t\left\{p_{rv} - p_{lv} - u_s\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\}\right\}\delta w_v - \int\limits_0^{l/v_0}\int\limits_0^t\left\{\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\}\delta w\,dx\cdot dt.$$

Aus der Forderung, daß für jede Wahl der δw die Variation von $\int\limits_0^t(\Pi - K)\,dt$ verschwindet, ergeben sich die folgenden zwei Bedingungen:

$$p_{rv} - p_{lv} - u_s\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rv} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{lv}\right\} = 0. \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Das sind die Gl. (1) und (4). Damit ist die Gültigkeit des Hamiltonschen Prinzips für unseren Fall nachgewiesen. Diese Variationsformulierung ist natürlich unabhängig von den Koordinaten, welche die w beschreiben. Wir gehen zu beliebigen Koordinaten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$

über. (In dieser Arbeit werden z. B. die w dargestellt als Summe von w_{ms} und einer Überlagerung der Eigenschwingungsformen; die A sind dann deren Koeffizienten.) Dann ist

$$\Pi = \Pi(A_1, A_2, \ldots A_n), \qquad K = K(A_1, A_2, \ldots A_n;\ \dot{A}_1, \dot{A}_2 \ldots \dot{A}_n).$$

Die Anfangs- und Endwerte der w sollen fest bleiben. Daher sind die δA am Anfang und am Ende 0. Dann erhält man

$$\delta \int_0^t (\Pi - K)\, d t = \int_0^t \left\{ \sum_k \delta A_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial A_k} - \frac{\partial K}{\partial A_k} \right) \right\} d t - \int_0^t \left\{ \sum_k \delta \dot{A}_k \frac{\partial K}{\partial \dot{A}_k} \right\} d t .$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$\delta \int_0^t (\Pi - K)\, d t = \int_0^t \left\{ \sum_k \delta A_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial A_k} - \frac{\partial K}{\partial A_k} + \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{A}_k} \right) \right) \right\} \partial t - \left(\sum_k \delta A_k \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{A}_k} \right) \Bigg|_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} .$$

Das letzte Glied wird 0. Soll die Variation verschwinden, so muß sein

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_k} - \frac{\partial K}{\partial A_k} + \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{A}_k} \right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Das sind die Lagrangeschen Gleichungen. Wichtig ist, daß bei der Ableitung des Hamiltonschen Prinzips, aus dem hier ja die Lagrangeschen Gleichungen hervorgehen, die Entropieverteilung als unabhängig von der Bewegung (hier also unabhängig von den A) vorausgesetzt war. Das zwingt zur Vorsicht bei Vorgängen, wo die Schwingungen einen Einfluß auf die Verbrennung haben. Zunächst wird die Lösung unseres Problems für den Fall gezeigt, daß die Entropieverteilung unabhängig von den Eigenschwingungen ist.

V. Die Eigenschwingungen bei unbeeinflußter Verteilung der Entropie. Wird die Entropie nicht durch die Schwingungen beeinflußt, so ist

$$u_s = u, \qquad v_{l0s} = v_{l0}, \qquad v_{r0s} = v_{r0}.$$

Im folgenden wird x durch ξ und u durch $\overline{U}$ nach den am Anfang gegebenen Beziehungen ersetzt:

$$\xi = \frac{x \cdot v_0}{l}, \qquad \overline{U} = \frac{u \cdot v_0}{l}.$$

$\overline{U}$ sei als Funktion von ξ in folgender Form vorgegeben:

$$\overline{U}(\xi_v) = z \cdot U(\xi_v) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

z hat für einen bestimmten zu untersuchenden Vorgang auch einen bestimmten Zahlenwert, trotzdem wird es für die Lösung der Differentialgleichungen als beliebig zu wählende Zahl betrachtet. U ist so zu wählen, daß die Werte u des wirklichen Vorganges wiedergegeben werden. In den Differentialgleichungen treten Glieder mit den verschiedenen Potenzen von z auf. Um dies auszunutzen, wird der Lösungsansatz als Taylorentwicklung nach z aufgebaut. Da wir z als beliebig wählbar ansehen, müssen die Glieder mit gleichen Potenzen in z für sich die Differentialgleichungen erfüllen. Man erhält dadurch Beziehungen, die nacheinander die Glieder mit z^0, z^1, z^2 usw. des Lösungsansatzes berechnen lassen. Diese formale Einführung von z führt nur dann zu einer guten Näherung für den wirklichen Vorgang, wenn auch für den Wert z, der diesem entspricht, in den Gleichungen die mit den höheren Potenzen von z behafteten Glieder klein werden.

Bei bekannten v_{l0} und v_{r0} lassen sich in jedem Augenblick die Eigenschwingungsformen g_h bestimmen. Sie seien so normiert, daß

$$\frac{1}{l^2} \int_0^1 g_h{}^2 \cdot d\xi = 1 \text{ ist} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Sie sind zueinander orthogonal:

$$\frac{1}{l^2} \int_0^1 g_h \cdot g_k \cdot d\xi = 0 \qquad \text{für} \qquad h \neq k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Die Kreisfrequenz in der h-ten Eigenschwingungsform ist ν_h. Das System der Eigenschwingungsformen ist vollständig für alle stetigen Funktionen, die für $\xi = 0$ und $\xi = 1$ den Wert 0 haben. Die g_h ändern sich mit ξ_v. Es sei

$$C_{hk} = \frac{1}{l^2} \int_0^1 g_h \cdot \frac{\partial g_k}{\partial \xi_v} \cdot d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Durch Differenzieren nach ξ_v erhält man aus den Gl. (7) und (8)

$$\frac{2}{l^2} \int_0^1 g_h \cdot \frac{\partial g_h}{\partial \xi_v} \cdot d\xi = 0; \qquad C_{hh} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

$$\frac{1}{l^2} \int_0^1 g_h \cdot \frac{\partial g_k}{\partial \xi_v} \cdot d\xi + \frac{1}{l^2} \int_0^1 g_k \cdot \frac{\partial g_h}{\partial \xi_v} \cdot d\xi = 0; \qquad C_{hk} = -C_{kh} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Für w machen wir den Ansatz

$$w = w_m + \sum_h A_h \cdot g_h .$$

Dieser Ansatz genügt den Bedingungen (2) und ist für stetige Funktionen, welche diesen Bedingungen genügen, vollständig. Wir beschränken unsere Untersuchungen auf die Betrachtung kleiner Schwingungen. Dann ist

$$\Pi = \frac{l^3}{2 v_0} \sum_h A_h^2 \cdot \nu_h^2 .$$

Weiter ist

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_m}{\partial t} + \sum_h \frac{d A_h}{d t} \cdot g_h + \sum_h A_h \cdot \frac{\partial g_h}{\partial t}$$

und

$$K = \frac{1}{2} \frac{l}{v_0} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\xi .$$

Als k-te der Lagrangeschen Gleichungen erhält man

$$\frac{l^3}{v_0} \cdot A_k \nu_k^2 - \frac{l}{v_0} \int_0^1 \left\{\frac{\partial w_m}{\partial t} + \sum_h \frac{d A_h}{d t} g_h + \sum_h A_h \cdot \frac{\partial g_h}{\partial t}\right\} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial t} \cdot d\xi$$
$$+ \frac{l}{v_0} \cdot \frac{d}{d t} \int_0^1 \left\{\frac{\partial w_m}{\partial t} + \sum_h \frac{d A_h}{d t} \cdot g_h + \sum_h A_h \cdot \frac{\partial g_h}{\partial t}\right\} \cdot g_k \cdot d\xi = 0 .$$

$\frac{\partial w_m}{\partial t}$ hat an der Verbrennungsstelle einen Sprung. Daher ist

$$\frac{d}{d t} \int_0^1 \frac{\partial w_m}{\partial t} g_k \cdot d\xi = \frac{d}{d t} \int_0^{\xi_v} \frac{\partial w_m}{\partial t} g_k \cdot d\xi + \frac{d}{d t} \int_{\xi_v}^{l} \frac{\partial w_m}{\partial t} \cdot g_k \, d\xi$$
$$= \frac{d \xi_v}{d t} g_{kv} \left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right)_{lv} - \left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right)_{rv}\right\} + \int_0^1 \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} g_k \cdot d\xi + \int_0^1 \frac{\partial w_m}{\partial t} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial t} \, d\xi .$$

Wir setzen dies ein, ersetzen dabei $\left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right)_{lv} - \left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right)_{rv}\right\}$ nach Gl. (3) (in unserem Falle fallen u_s

und u zusammen), führen die Differentiation nach t durch, ersetzen $\frac{d\xi_v}{dt}$ durch $\overline{U}$ und berücksichtigen (7), (8) und (11). Es ergibt sich

$$l^2 \cdot A_k \cdot \nu_k{}^2 + l^2 \frac{d^2 A_k}{d t^2} + \int_0^1 \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} g_k \cdot d\xi + 2\int_0^1 \frac{\partial g_k}{\partial t}\Bigl(\sum_h \frac{d A_h}{d t} \cdot g_h\Bigr) d\xi$$

$$+ \int_0^1 g_k \Bigl(\sum_h A_h \cdot \frac{\partial^2 g_h}{\partial t^2}\Bigr) d\xi - \overline{U}^2 \left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial \xi}\right)_{l v} - \left(\frac{\partial w_m}{\partial \xi}\right)_{r v}\right\} g_{k v} = 0 .$$

Es ist unter Einführung von (6)

$$\frac{\partial g_h}{\partial t} = \frac{\partial g_h}{\partial \xi_v} \cdot \overline{U} = z \cdot \frac{\partial g_h}{\partial \xi_v} \cdot U ,$$

$$\frac{\partial^2 g_h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g_h}{\partial \xi_v{}^2} \cdot \overline{U}^2 + \frac{\partial g_h}{\partial \xi_v} \cdot \frac{d \overline{U}}{d \xi_v} \cdot U = z^2 \left(\frac{\partial^2 g_k}{\partial \xi_v{}^2} U^2 + \frac{\partial g_h}{\partial \xi_v} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_v} \cdot U\right).$$

w_m kann man als Funktion von ξ_v auffassen:

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} = z^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi_v} \cdot U^2 + \frac{\partial w_m}{\partial \xi_v} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_v} \cdot U\right).$$

Führt man noch $C_{h k}$ nach Gl. (9) ein und bricht bei den in z linearen Gliedern ab, so erhält man als k-te der Lagrangeschen Gleichungen

$$A_k \cdot \nu_k{}^2 + \frac{d^2 A_k}{d t^2} + 2 z \cdot U \sum_h C_{h k} \cdot \left(\frac{d A_h}{d t}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

k geht von 1 bis ∞.

Zur Lösung dieses Gleichungssystemes machen wir den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} A_k &= A_{k0} + z \cdot A_{k1} + z^2 \cdot A_{k2} + \cdots \\ A_h &= A_{h0} + z \cdot A_{h1} + z^2 \cdot A_{h2} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

A_{h0} und A_{k0} sollen so bestimmt werden, daß sie die Lösungen des Gleichungssystemes für $z=0$ darstellen. Von den A_{k1} und A_{h1} sei gefordert, daß sie zusammen mit den A_{h0} und A_{k0} das Gleichungssystem erfüllen unter Berücksichtigung auch der linearen Glieder in z. Die Lösung wird so gewählt, daß sie auch bei beliebig großem t richtig ist. Für die Glieder ohne z lautet eine Lösung:

$$A_{k0} = a_{k0}(\xi_v) \cdot e^{i\int_0^t \nu_k \cdot dt}, \qquad A_{h0} = 0 \quad \text{für} \quad h \neq k .$$

a_{k0} kann komplex sein. Die Lösung entspricht der k-ten Eigenschwingung; wir bezeichnen sie mit ihren weiteren Näherungen deshalb als k-te Lösung. Es ist

$$\frac{d^2 A_{k0}}{d t^2} = e^{i\int_0^t \nu_k dt} \cdot \left\{\begin{matrix} z^2 U^2 \cdot \dfrac{d^2 a_{k0}}{d \xi_v{}^2} + z^2 \cdot \dfrac{d a_{k0}}{d \xi_v} \cdot \dfrac{d U}{d \xi_v} \cdot U \\ + 2 z \cdot U \cdot i \nu \dfrac{d a_{k0}}{d \xi_v} + z \cdot U \cdot i\, a_{k0} \cdot \dfrac{d \nu_k}{d \xi_v} \end{matrix} \; - \nu_k{}^2 \cdot a_{k0} \right\}.$$

Tatsächlich verschwinden die von z freien Glieder in Gl. (12). Setzt man in Gl. (12) A_{k0} ein und betrachtet die mit z behafteten Glieder, so erhält man

$$\left\{2 U \cdot \frac{d a_{k0}}{d \xi_v} \cdot i \nu_k + U \cdot a_{k0} \cdot i \frac{d \nu_k}{d \xi_v}\right\} \cdot e^{i\int_0^t \nu_k dt} + \frac{d^2 A_{k1}}{d t^2} + \nu_k{}^2 A_{k1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

$$2 U \cdot C_{h k} \cdot a_{k0}\, i \cdot \nu_k \cdot e^{i\int_0^t \nu_k \cdot dt} + \frac{d^2 A_{h1}}{d t^2} + \nu_h{}^2 A_{h1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Gl. (14) hat nur dann eine endlichbleibende Lösung, wenn die Glieder mit $e^{i\int_0^t \nu_k dt}$ zu 0 werden.

Man erhält also die Bedingung

$$2\frac{d\,a_{k0}}{d\,\xi_v}\cdot\nu_k+a_{k0}\frac{d\,\nu_k}{d\,\xi_v}=0$$

und daraus

$$a_{k0}\cdot\sqrt{\nu_k}=\text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16).$$

Für A_{k1} erhält man

$$A_{k1}=a_{k1}(\xi_v)\cdot e^{i\int\limits_0^t \nu_k\,d\,t}.$$

Wie sich a_{k0} aus der Bedingung bestimmte, daß die Glieder mit z eine endlichbleibende Lösung liefern, so bestimmt sich a_{k1} aus einer ähnlichen Bedingung für die Glieder mit z^2.

Die Gl. (15) liefert

$$A_{h1}=\frac{1}{\nu_k^2-\nu_h^2}\cdot 2\,U\cdot C_{hk}\cdot a_{k0}\cdot i\,\nu_k\cdot e^{i\int\limits_0^t \nu_k\,d\,t}+K_{h1}\cdot e^{i\int\limits_0^t \nu_h\,d\,t}.$$

Die Lösungen unseres Gleichungssystemes erscheinen komplex. In Wirklichkeit sind jeweils der reelle Anteil und der imaginäre Anteil des Systems für sich Lösungen. Die Gesamtlösung setzt sich aus den Einzellösungen (13) und ihren weiteren Näherungen zusammen. Für $t=t_0$ mögen die Konstanten der Lösungen für die a_{k0} und a_{h0} so gewählt sein, daß die für diesen Zeitpunkt vorgegebenen Lagen und Geschwindigkeiten dargestellt werden. Dann sind die bei den weiteren Gliedern a_{k1}, a_{h1} usw. a_{k2}, a_{h2} usw. auftretenden Konstanten K_{k1}, K_{h1} usw. K_{k2}, K_{h2} usw. so zu wählen, daß für $t=t_0$ die durch die weiteren Näherungen dargestellten Geschwindigkeiten verschwinden.

VI. Berücksichtigung des Einflusses der Schwingungen auf die Entropieverteilung und auf die Verbrennungsgeschwindigkeit. Dem vorigen Abschnitte lag die Annahme zugrunde, daß die Werte v_{l0s} und v_{r0s} sowie die Verbrennungsgeschwindigkeit unabhängig von den auftretenden Schwingungen sind. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. So ist etwa bei einem Vorgange ohne Wärmeaustausch v_{l0s} von dem Drucke abhängig, unter dem das Teilchen verbrannt ist; auch ist eine Beeinflussung der Verbrennungsgeschwindigkeit durch den Druck wahrscheinlich.

Die Abweichungen der jetzt gültigen Werte von den Größen des schwingungsfreien Vorganges seien

$$\Delta v_{l0}=v_{l0s}-v_{l0};\qquad \Delta v_{r0}=v_{r0s}-v_{r0};\qquad \Delta V_l=V_{ls}-V_l$$
$$\Delta u=u_s-u;\qquad \Delta w_m=w_{ms}-w_m;\qquad \Delta U=U_s-U \qquad \text{usw.}$$

Alle diese Abweichungen werden durch die Schwingungen verursacht, werden also proportional den A. Das Hamiltonsche Prinzip, aus dem die Lagrangeschen Gleichungen hervorgingen, setzte aber die v_{l0s} und v_{r0s} als unabhängig von den A voraus. Diese Schwierigkeit läßt sich auf folgendem Wege überwinden. Wir geben uns beliebige, zunächst von den A unabhängige Werte Δv_{l0}, Δv_{r0} und Δu vor. Für die dadurch bestimmte Entropieverteilung werden die Lagrangeschen Gleichungen aufgestellt. Es wird also zunächst potentielle und kinetische Energie berechnet, dann nach den A und $\dot{A}$ differenziert und schließlich in die Gl. (5) eingesetzt. Man erhält so ein Gleichungssystem für die Bewegungen bei der abgeänderten Entropieverteilung. Wie darin die Δv_{l0}, Δv_{r0} und Δu gewählt werden, ist gleichgültig, das Gleichungssystem ist immer richtig. Es ist auch dann richtig, wenn zwischen den Δv_{l0}, Δv_{r0} und Δu und den A die physikalisch zu fordernden Beziehungen gelten. In die Differentialgleichungen darf man daher diese Beziehungen einführen. Dagegen müssen in den Energieausdrücken die Δv_{l0}, Δv_{r0} und Δu noch unabhängig von den A erscheinen.

Für w machen wir den Ansatz

$$w=w_{ms}+\sum_h A_h\cdot g_h\,.$$

w_{ms} sind dabei die Lagen, die bei adiabatischem Druckausgleich auftreten unter Berücksichtigung der ΔU und ΔV_l bzw. ΔV_r. Dagegen sind die g_h für ungeänderte Lagen der Verbrennungsfront und ungeänderte Werte V bestimmt. Das hat den Vorteil, daß wenigstens die Koordinaten von den Schwingungen unabhängig bleiben.

Π wird wieder eine quadratische Form in den A_h. Nur treten außer den Gliedern $\frac{l^3}{2\,v_0}\sum A_h^2\,\nu_h^2$, die sich schon früher ergaben, noch weitere Glieder auf, die die ΔU und ΔV mindestens linear enthalten. Differenziert man nach einem der A, so bleibt ein homogener Ausdruck in den A übrig. Die Glieder ohne ΔU und ΔV sind dabei dieselben wie früher, die anderen Glieder enthalten eines der A und ΔU und ΔV mindestens linear. Da die ΔU und ΔV proportional den A sind, werden in den Differentialgleichungen die aus der potentiellen Energie hervorgehenden Glieder mit ΔU und ΔV quadratisch in den A und dürfen deshalb bei der Untersuchung kleiner Schwingungen weggelassen werden.

Für K erhält man

$$K=\frac{l}{2\,v_0}\int_0^1\left\{\frac{\partial\,w_{ms}}{\partial\,t}+\sum_h\frac{d\,A_h}{d\,t}\,g_h+\sum_h A_h\cdot\frac{\partial\,g_h}{\partial\,t}\right\}^2 d\,\xi.$$

Als k-te der Lagrangeschen Gleichungen ergibt sich

$$\frac{l^3}{v_0}\cdot A_k\,\nu_k^2+\frac{l^3}{v_0}\cdot\frac{d^2 A_k}{d\,t^2}+2\,\frac{l^3}{v_0}\cdot z\cdot U\sum_h C_{hk}\cdot\frac{d\,A_h}{d\,t}+\frac{l}{v_0}\int_0^1\frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial\,t^2}\cdot g_k\cdot d\,\xi$$

$$+\frac{l}{v_0}\int_0^1 g_k\cdot\sum_h A_h\cdot\frac{\partial^2 g_h}{\partial\,t^2}\cdot d\,\xi-z^2\cdot U_s^2\left\{\left(\frac{\partial\,w_{ms}}{\partial\,\xi}\right)_{lv}-\left(\frac{\partial\,w_{ms}}{\partial\,\xi}\right)_{rv}\right\}=0\,.$$

Die durch Differenzieren der g_h auftretenden Glieder verschwinden aus den gleichen Gründen wie im vorigen Abschnitt. Beschränkt man sich auf die von z freien und in z linearen Glieder, so lautet die k-te der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{l^3}{v_0}\cdot A_k\cdot\nu_k^2+\frac{l^3}{v_0}\cdot\frac{d^2 A_k}{d\,t^2}+2\,\frac{l^3}{v_0}\cdot z\cdot U\sum_h C_{hk}\cdot\frac{d\,A_h}{d\,t}+\frac{l}{v_0}\int_0^1\frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial\,t^2}\cdot g_k\cdot d\,\xi=0\,.$$

Der einzige Unterschied gegenüber der früheren Gl. (12) ist das Auftreten des Gliedes

$$\frac{l}{v_0}\int_0^1\frac{\partial^2 w_{ms}}{d\,t^2}\cdot g_k\cdot d\,\xi\,.$$

Wir berechnen es im nächsten Abschnitte. Das Ergebnis sei vorweggenommen, um die hier begonnene Rechnung zu Ende führen zu können. Zunächst zeigt sich (21), daß der Ausdruck, der sich für dieses Integral ergibt, z als Faktor enthält. Als Lösung für die von z freien Glieder des Gleichungssystemes erhält man auch hier

$$A_{k0}=a_{k0}\cdot e^{i\int^t\nu_k\,d\,t}\,.$$

Unter Benutzung dieses Ausdrucks erhält man dann (25)

$$\int_0^1\frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial\,t^2}\cdot g_k\cdot d\,\xi=-\,i\cdot z\cdot U\cdot\nu_k\cdot a_{k0}\cdot e^{i\int^t\nu_k\,d\,t}\cdot l^2\cdot q\cdot(\xi_v)\,.$$

Die Bedingung für das Endlich-Bleiben der ersten Näherung gibt:

$$2\,a_{k0}\cdot\frac{d\,\nu_k}{d\,\xi_v}+\nu_k\cdot\frac{d\,a_{k0}}{d\,\xi_v}-\nu_k\cdot a_{k0}\cdot q\,(\xi_v)=0\,.$$

Daraus

$$a_{k0}\cdot\sqrt{\nu_k}\cdot e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\xi_v}q\,(\xi_v)\,d\,\xi_v}=\text{konst.}$$

Dies ist die Lösung unseres Problems. Wesentlich ist der Einfluß von q. Man vergleiche dazu die Bemerkung am Ende des nächsten Abschnittes.

VII. Die Berechnung von $\int_0^1 \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} g_k \cdot d\xi$. Bei der Berechnung dieses Integrals soll vorausgesetzt werden, daß im Verbrannten und im Unverbrannten jeweils die Gleichung idealer Gase gilt, und daß die spezifischen Wärmen konstant sind. Dann besteht für das Verbrannte die Gleichung

$$\left(\frac{v}{v_0 \cdot V_l}\right)^{-\varkappa_l} = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18).$$

Es soll angenommen werden, daß im Unverbrannten weder Wärmeverluste noch Wärmeaustausch eintritt, dann gilt dort

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\varkappa_r} = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

Zunächst werde $\frac{d^2 \Delta p_m}{d t^2}$ berechnet. Unter den eben gemachten Annahmen ist p_{ms} unabhängig vom Wärmeaustausch im Verbrannten. Die Zunahme von p_{ms} ist daher gleich dem Werte, der bei Verbrennung ohne Wärmeverluste eintreten würde, unter Abzug eines Betrages, der durch die nach außen abgeführte Wärmemenge bedingt ist. Es ist nicht wahrscheinlich, daß die Wärmeabfuhr periodisch im Rhythmus der Schwingungen erfolgt. Deshalb läßt sich die abgeführte Wärmemenge als Funktion von x_v darstellen und ihr zweiter Differentialquotient nach der Zeit wird klein mit z^2. $\frac{d^2 p_{ms}}{d t^2}$ oder auch $\frac{d^2 \Delta p_m}{d t^2}$ wird daher bis auf Glieder mit z^2 gleich dem entsprechenden Werte bei Verbrennung ohne Wärmeverluste nach außen und ohne Wärmeaustausch im Innern. Diesen Wert können wir berechnen. Es möge während der Zeit $d t$ um $\Delta u \cdot d t$ mehr Gemisch verbrennen, als es der schwingungsfreien Verbrennung entspricht. Der dabei entstehende Wert V_{las} ist um ΔV_{la} größer als im schwingungsfreien Fall. (Die Änderung von V_{la} wird durch die Druckschwankungen an der Verbrennungsstelle hervorgerufen. Vgl. S. 298.) Während der Zeit dt nimmt das Volumen der gesamten Gasmenge bezogen auf den Druck p_m um verschiedene Beträge zu, je nachdem ob Schwingungen auftreten oder nicht. Bei schwingungsbehafteter Verbrennung ist die Volumenzunahme um

$$v_0 \cdot \Delta u \cdot d t \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}}\right) + v_0 \cdot u \cdot d t \, \Delta V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}}$$

größer als bei schwingungsfreier Verbrennung. Eine zusätzliche Druckerhöhung um $d \Delta p_m$ ändert das Volumen der gesamten Gasmenge ab um

$$d \Delta p_m \int_0^{l/v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d x .$$

Die gesamte zusätzliche Volumenänderung ist 0. Daher

$$d \Delta p_m \int_0^{l v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d x + v_0 \cdot \Delta u \cdot d t \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}}\right) + v_0 \cdot u \cdot d t \cdot \Delta V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} = 0 ,$$

$$\frac{d \Delta p_m}{d t} = -z \cdot l \cdot \frac{\Delta U \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}}\right) + U \cdot \Delta V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}}}{\int_0^{l/v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d x} .$$

Durch Differenzieren erhält man bis auf Glieder mit z^2

$$\frac{d^2 \Delta p_m}{d t^2} = -z \cdot l \frac{\frac{d}{d t}\left\{\Delta U \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}}\right) + U \cdot \Delta V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}}\right\}}{\int_0^{l/v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d x} \quad \ldots \ldots (20).$$

Es soll nun Δw durch Δp_m und ΔV_l ausgedrückt werden. Es ist für das Verbrannte

$$v = v(p, V_l) = \frac{\partial w}{\partial x},$$

für das Unverbrannte

$$v = v(p) \qquad = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Es ist $\Delta w = w_{ms} - w_m$. Dann ist

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \Delta p_m + \left(\frac{\partial v}{\partial V_l}\right)_m \cdot \Delta V_l .$$

Daraus für das Verbrannte

$$\Delta w_l = \Delta p_m \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m dx + \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial V_l}\right)_m \cdot \Delta V_l \cdot dx,$$

für das Unverbrannte

$$\Delta w_r = -\Delta p_m \int_x^{l/v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot dx .$$

Es ist bis auf Glieder mit z^2

$$\int_0^{l/v_0} \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx = \int_0^{x_v} \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx + \int_{x_v}^{l/v_0} \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx = \int_0^{x_v} \frac{\partial^2 \Delta w_m}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx + \int_{x_v}^{l/v_0} \frac{\partial^2 \Delta w_m}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx$$

$$= \frac{d^2 \Delta p_m}{d t^2} \cdot \left\{ \int_0^{x_v} \left(\int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot dx \right) \cdot g_k \cdot dx - \int_{x_v}^{l/v_0} \left(\int_x^{l/v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot dx \right) g_k \cdot dx \right\}$$

$$+ \int_0^{x_v} \left(\frac{d^2}{d t^2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial V_l}\right)_m \cdot \Delta V_l \, dx \right) g_k \cdot dx .$$

Das letzte Integral wird durch die Wärmeleitung hervorgerufen. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß es für alle praktischen Fälle belanglos ist. Von der Temperaturverteilung bei Vorhandensein von Schwingungen kann man sich folgendes Bild machen. Bei schwingungsfreier Verbrennung erhält man je nach dem Drucke, unter dem ein Teilchen verbrannt ist, und der darauf folgenden Wärmeleitung ein v_l als Funktion von x und x_v, wobei x_v die Zeit ersetzt. Der zweite Differentialquotient ist klein wie z^2 und entfällt deshalb für die erste Näherung. Treten Schwingungen auf, so wird die Temperaturverteilung so abgeändert, als ob an der Verbrennungsstelle eine periodische Wärmequelle vorhanden wäre. Die Ergiebigkeit dieser Quelle (die je Zeiteinheit zu- oder abgeführte Wärmemenge) muß so bemessen sein, daß an der Verbrennungsstelle die Energiebilanz richtig wird. Die durch eine wandernde periodische Wärmequelle erzeugte Temperaturverteilung wird dargestellt durch wandernde Wellen mit räumlich und zeitlich veränderlicher Amplitude. Die Wellenlänge dürfte in praktischen Fällen nur ein Bruchteil der Wellenlänge jener Eigenschwingungsform sein, deren Schwingung die periodische Wärmequelle an der Verbrennungsstelle hervorgerufen hat. Der Wärmefluß, der durch diese Temperaturverteilung zusätzlich hervorgerufen wird, liegt höchstens in der Größe der Ergiebigkeit der Quelle. Die zeitliche Änderung des Wärmeflusses geschieht höchstens mit der Frequenz der Quelle, dann nämlich, wenn die Wanderungsgeschwindigkeit der Temperaturwellen sehr groß ist gegenüber der Verbrennungsgeschwindigkeit. Die zeitliche Änderung des Wärmeflusses hat also höchstens die Größe des entsprechenden Wertes bei unendlicher Wärmeleitzahl. Dies genügt, um das letzte Integral abzuschätzen.

$\int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial V_l}\right)_m \cdot \Delta V_l \cdot dx$ stellt die Änderung des Volumens der gesamten von 0 bis x eingeschlossenen Gasmenge dar bei dem Drucke p_m unter der Wirkung der ΔV_l. Nun ist unter der Annahme konstanter spezifischer Wärmen das Gesamtvolumen bei konstantem Drucke unabhängig von der Temperaturverteilung im Innern, es ist proportional der gesamten inneren

Energie. Die zeitliche Änderung des Integrals ist also proportional der unter der Wirkung jener periodischen Quelle der betreffenden Gasmasse zufließenden Wärmemenge, diese ist identisch mit dem zusätzlichen Wärmefluß durch den Querschnitt x. Die zweite Ableitung des Integrals ist dann proportional der zeitlichen Änderung des Wärmeflusses. Oben war gezeigt worden, daß diese höchstens die Größe des entsprechenden Wertes bei unendlicher Wärmeleitung hat. In den praktisch auftretenden Fällen wechselt die Richtung dieser Wärmeleitung von Ort zu Ort das Vorzeichen entsprechend der oben skizzierten Temperaturverteilung, während bei unendlicher Wärmeleitung der Wärmetransport für alle Teilchen in gleicher Richtung erfolgt. Deshalb wird in den praktisch vorkommenden Fällen

$$\int_0^{x_v}\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\int_0^{x}\left(\frac{\partial v}{\partial V_l}\right)_m \cdot \Delta V_l\,d\,x\right) g_k\,d\,x$$

klein gegenüber dem gleichen Integral bei unendlichem Wärmeaustausch und zwar im gleichen Maße, wie die Zahl der Wellen in der Temperaturverteilung auf eine Wellenlänge der erzeugenden Eigenschwingung des Gases wächst. Der Wert M (Vergrößerungsverhältnis der Druckschwankungen, vgl. S. 305) ergäbe sich bei unendlicher Wärmeleitung um etwa 20% größer als bei der Wärmeleitzahl 0. Entfallen nur 20 Wellen der Temperaturverteilung auf eine Wellenlänge der erzeugenden Schwingung, so ist schon der Einfluß der Wärmeleitungsglieder auf das Vergrößerungsverhältnis der Schwingungen kleiner als 2% und damit vernachlässigbar.

Zur Berechnung der anderen Glieder ist es zweckmäßig, g_k umzuformen. Es ist $p = p\,(v, V_l)$ im Verbrannten und $p = p\,(v)$ im Unverbrannten. Für $\Delta V_l = 0$ ist

$$p - p_m = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \text{wobei} \quad y = w - w_m\,.$$

Setzt man p in die Bewegungsgleichung (1) ein, die ja in gleicher Form auch für die Eigenschwingungen gilt, so ergibt sich

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right\} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,.$$

Die Gleichung ist erfüllt für $y = g_k \cdot e^{i\,\nu_k\,t}$. Daher gilt

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x}\right\} = -\nu_k^{\,2} \cdot g_k\,.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{l/v_0} \frac{\partial^2 w_{m\,s}}{\partial t^2} \cdot g_k\,d\,x = \frac{1}{\nu_k^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta p_m}{\partial t^2}\left\{\int_0^{x_v}\left(\int_0^{x}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d\,x\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{d\,x}\right\} d\,x\right.$$

$$\left. - \int_{x_v}^{l/v_0}\left(\int_x^{l/v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d\,x\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x}\right\} \cdot d\,x\right\}$$

$$= \frac{1}{\nu_k^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta p_m}{\partial t^2}\left\{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x}\right]_{v\,l} \cdot \int_0^{x_v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d\,x + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x}\right]_{v\,r} \cdot \int_{x_v}^{l/v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d\,x\right.$$

$$\left. - \int_0^{x_v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} \cdot d\,x - \int_{x_v}^{l/v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} \cdot d\,x\right\}.$$

Es ist $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = 1$. Deshalb wird das erste Integral 0.

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \left(\frac{\partial g_k}{\partial x}\right)\right]_{v\,l} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m \cdot \left(\frac{\partial g_k}{\partial x}\right)\right]_{v\,r} = \Delta p_{k\,v}$$

ist für die k-te Eigenschwingungsform die Abweichung des Drucks an der Verbrennungsstelle vom mittleren Druck p_m. Damit erhält man

$$\int_0^{l/v_0} \frac{\partial^2 w_{m\,s}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot d\,x = \frac{1}{\nu_k^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta p_m}{\partial t^2} \cdot \Delta p_{k\,v} \cdot \int_0^{l/v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m \cdot d\,x\,.$$

Setzt man noch Gl. (20) ein, so ergibt sich

$$\int_0^{l/v_0} \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx = -\frac{z \cdot l}{\nu_k^2} \cdot \Delta p_{kv} \frac{d}{dt} \left\{ \Delta U \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}} \right) + U \cdot \Delta V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} \right\} \quad . \quad (21).$$

Der Einfluß des Drucks auf die Verbrennungsgeschwindigkeit sei folgendermaßen formuliert. Hat der Druck an der Verbrennungsstelle den Verlauf

$$p_v = p_m + \Delta p_v \cdot e^{i \nu t},$$

so sei

$$U_s = U \left(1 + c \frac{\Delta p_v}{p_m} \cdot e^{i(\nu t - \varphi)} \right), \qquad \Delta U = U \cdot c \frac{\Delta p_v}{p_m} \cdot e^{i(\nu t - \varphi)}.$$

c und φ sind dabei Funktionen der Zustandsgrößen an der Verbrennungsstelle, die auf Grund physikalischer Vorstellungen gewählt werden können. So lassen rohe gaskinetische Überlegungen $c = 1$ und $\varphi = 0$ erwarten.

Für die k-te Lösung ergab sich im vorigen Abschnitte

$$A_{k0} = a_{k0} \cdot e^{i \int_0^t \nu_k dt}.$$

Demnach ist für die k-te Lösung

$$\Delta U = U \cdot c \frac{\Delta p_{kv}}{p_m} \cdot a_{k0} \cdot e^{i \left(\int_0^t \nu_k dt - \varphi \right)}.$$

Es ergibt sich bis auf Glieder mit z

$$\frac{d}{dt} \left\{ \Delta U \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}} \right) + U \, \Delta V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} \right\}$$

$$= U \cdot a_{k0} \cdot \frac{\Delta p_{kv}}{p_0} \cdot i \nu_k \cdot e^{i \int_0^t \nu_k dt} \cdot \left\{ \frac{c \cdot e^{-i\varphi}}{P_m} \cdot \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}} \right) - \frac{d V_{la}}{d P_v} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} \right\}.$$

Im nächsten Abschnitt sind die Beziehungen für V_{la} angegeben. Man erhält mit ihnen

$$\frac{c \cdot e^{-i\varphi}}{P_m} \left(V_{la} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} - P_m^{-\frac{1}{\varkappa_r}} \right) - \frac{d V_{la}}{d P_v} \cdot P_m^{-\frac{1}{\varkappa_l}} = \frac{1}{P_m^2} \left\{ c \cdot e^{-i\varphi} - \frac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_l} \right\}$$

$$\cdot \left\{ \frac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_l} \cdot C + \frac{\varkappa_l - \varkappa_r}{\varkappa_l (\varkappa_r - 1)} \cdot P_m^{1 - \frac{1}{\varkappa_r}} \right\}.$$

Den Wert ΔP_v errechnen wir aus dem Unverbrannten. Dort ist

$$g_k = y_{rk} = B_{rk} \cdot \sin \frac{\nu_k \cdot l (1 - \xi)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa + 1}{2 \varkappa} \right)_r}} \qquad \text{(vgl. S. 304).}$$

Für das Unverbrannte ergibt sich aus Gl. (19)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_m = -\varkappa_r \frac{p_0}{v_0} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-(\varkappa_r + 1)} = -\varkappa_r \frac{p_0}{v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \right)_r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Damit erhält man

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_{kv} &= \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_m \cdot \left(\frac{\partial g_k}{\partial x} \right)_v = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_m \cdot \left(\frac{\partial g_k}{\partial \xi} \right)_v \cdot \frac{v_0}{l} \\ &= \frac{B_{rk}}{l} \cdot \nu_k \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\varkappa_r \cdot p_0}{v_0}} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa + 1}{2 \varkappa} \right)_r} \cdot \cos \frac{\nu_k \cdot l (1 - \xi_v)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa + 1}{2 \varkappa} \right)_r}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (23).$$

Ersetzt man im Integral noch x durch ξ, so ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot d\xi = \frac{v_0}{l} \int_0^{l/v_0} \frac{\partial^2 w_{ms}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot dx.$$

Es sei

$$\left.\begin{array}{l} q = \dfrac{(B_{r\,k})^2}{l^2} \cdot \varkappa_r \cdot \cos^2 \dfrac{\nu_k \cdot l\,(1-\xi_\nu)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 \cdot v \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}}} \cdot \left\{ c \cdot e^{-i\varphi} - \dfrac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_l} \right\} \\ \qquad \cdot \left\{ \dfrac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_l} \cdot C \cdot P_m^{-\left(1-\frac{1}{\varkappa_r}\right)} + \dfrac{\varkappa_l - \varkappa_r}{\varkappa_l\,(\varkappa_r - 1)} \right\} \end{array}\right\} \quad . \quad (24).$$

Dann ist

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 w_{m\,s}}{\partial t^2} \cdot g_k \cdot d\,\xi = -z\,U \cdot a_{k\,0} \cdot i\,\nu_k \cdot e^{i\int_0^t \nu_k \cdot d\,t} \cdot l^2\,q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Als einziger physikalisch noch unbekannter Ausdruck tritt hier und in der ganzen Berechnung der $A_{k\,0}$ überhaupt das Glied $c \cdot e^{-i\varphi}$ auf. Dessen Realteil wirkt sich als Änderung der Schwingungsamplitude, der Imaginärteil als Phasenverschiebung aus. Experimentell ist nur die Amplitudenveränderung sicher festzustellen. Wie aus dem durchgerechneten Beispiel hervorgeht, ist der Einfluß des Realteils von $c \cdot e^{-i\varphi}$ so stark, daß es durchaus als möglich erscheint, diesen Ausdruck auf Grund des Versuches zu bestimmen.

In den nächsten Abschnitten soll die hier entwickelte Theorie ausgewertet werden für die Verbrennung von Benzol, einmal unter der Annahme, daß im Verbrannten kein Wärmeaustausch eintritt, zweitens für den Fall, daß im Verbrannten konstante Temperatur herrscht (bis auf die Nachbarschaft der Verbrennungsstelle). Die Hauptschwierigkeit liegt im ersten Falle in der Bestimmung der Eigenschwingungsformen. Dafür wird ein gut brauchbares Näherungsverfahren entwickelt.

VIII. Die auf Anfangsdruck reduzierte Dichte bei Verbrennung ohne Wärmeaustausch. Bei Vorgängen ohne Wärmeaustausch sind die $V_l = V_{l\,a}$. Sie sind unabhängig von der Zeit und nur abhängig von dem Druck, unter dem ein Teilchen verbrannt ist. Die bei schwingungsfreier Verbrennung ohne Wärmeaustausch auftretenden Verhältnisse sind von Mache behandelt[2]).

Wir geben die von ihm gewonnenen Ergebnisse mit unseren Bezeichnungen wieder. Die Adiabatengleichungen im Verbrannten und Unverbrannten sind die Gl. (18) und (19). Verbrennen wir ein Teilchen mit der Anfangstemperatur T_0 unter gleichem Druck, so sei die Verbrennungsendtemperatur $T_{0\,l}$. Bei der Verbrennung ändert sich die Molekülzahl je Masseneinheit des Gemisches bzw. der Rauchgase. Es sei β das Verhältnis der Molekülzahl im Verbrannten zu der im Unverbrannten. Es sei

$$C = \beta \cdot \frac{\varkappa_l}{\varkappa_l - 1} \cdot \frac{T_0\,l}{T_0} - \frac{\varkappa_r}{\varkappa_r - 1}.$$

Verbrennt ein Teilchen unter dem Druck P_v, so ist

$$V_{l\,a} = \frac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_l} \cdot P_v^{\left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)_l} \cdot C + \frac{\varkappa_r}{\varkappa_l} \cdot \frac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_r - 1} \cdot P_v^{\frac{1}{\varkappa_l} - \frac{1}{\varkappa_r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Der Verbrennungsenddruck bei schwingungsfreier Verbrennung sei $P_{m\,1}$. Es ist

$$P_{m\,1} = \frac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_r - 1} + (\varkappa_l - 1) \cdot C\,.$$

Für ein vorgegebenes p_m kann bei schwingungsfreier Verbrennung ($p_v = p_m$) die augenblickliche Lage der Verbrennungsfront nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$(1 - \xi_v) = \frac{P_{m_1} - P_m}{\dfrac{\varkappa_l - \varkappa_r}{\varkappa_r - 1} \cdot P_m^{1 - \frac{1}{\varkappa_r}} + (\varkappa_l - 1) \cdot C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Aus Gl. (26) ergibt sich durch Differenzieren mit einigen Umformungen

$$\frac{d\,V_{l\,a}}{d\,P_v} = -\frac{\varkappa_l - 1}{\varkappa_l \cdot P_v} \left(V_{l\,a} - P_v^{\frac{1}{\varkappa_l} - \frac{1}{\varkappa_r}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

[2]) Mache: Die Physik der Verbrennungserscheinungen, Leipzig 1918, Veit & Co., S. 54 ff.

und aus (28) und (27) errechnet sich

$$\frac{d V_{l\,a}}{d\,\xi_v} = \frac{-(\varkappa_l - 1)\cdot\left(V_{l\,a} - P_m^{\frac{1}{\varkappa_l}-\frac{1}{\varkappa_r}}\right)^2 \cdot P^{-\frac{1}{\varkappa_l}}}{1 - \left(1 - \frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)\cdot P^{-\frac{1}{\varkappa_r}}(1 - \xi_v)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

Dieser Ausdruck wird bei der numerischen Bestimmung der Eigenschwingungsformen nützlich sein.

Gibt man p_m vor, so läßt sich der bei der Verbrennung unter diesem Druck entstehende Wert $V_{l\,a}$ und die zugehörige Lage der Verbrennungsfront berechnen. Da kein Wärmeaustausch besteht, ändert sich der Wert $V_{l\,a}$ für das unter dem Drucke p_m verbrannte Teilchen nicht mehr im Laufe der Zeit. Man erhält also $V_{l\,a}$ als Funktion von ξ, indem man die für gleiches p_m errechneten Werte $V_{l\,a}$ und ξ_v einander zuordnet und dabei ξ_v durch ξ ersetzt. Wir betrachten die Verbrennung von Benzol mit der Mindestluftmenge bei einer Anfangstemperatur von 20° C. $T_0 = 293°$ abs. Der untere Heizwert des Benzols ist 9600 kcal/kg.

$T_{0\,l}$ errechnet sich zu 2325° abs. $\varkappa_r = 1{,}35$; $\varkappa_l = 1{,}24$; $\beta = 1{,}01$. Das Molekulargewicht des unverbrannten Gases ist 30,2. Dann erhält man $p_0 \cdot v_0 = 80900\ \mathrm{m^2/sec^2}$.

$$C = 37{,}6;\ P_{m\,1} = 9{,}70\,,$$

$$1 - \xi_v = \frac{9{,}70 - P_m}{9{,}01 - 0{,}31\cdot P_m^{0{,}259}}\,,$$

$$V_{l\,a} = 7{,}27\cdot P_m^{-0{,}194} + 0{,}747\cdot P_m^{0{,}066}\,,$$

$$\frac{d V_{l\,a}}{d\,\xi} = -\frac{0{,}24\left(V_{l\,a} - P_m^{0{,}066}\right)^2\cdot P_m^{-0{,}806}}{1 - (1-\xi)\cdot P_m^{-0{,}741}\cdot 0{,}082}\,.$$

Die Zahlenwerte sind am Schluß in einer Tabelle vereinigt (Zeile 1 bis 4).

IX. Die Eigenschwingungsformen des gänzlich verbrannten Gemisches. Im allgemeinen ist die Dichte im Verbrannten von Ort zu Ort verschieden. Es soll gezeigt werden, wie man die Eigenschwingungsformen trotzdem bequem berechnen kann. Der wesentliche Gedanke ist folgender: Es läßt sich ein System von Funktionen angeben, dessen höhere Glieder sich besser und besser an die höheren Eigenschwingungsformen anschließen. Wir stellen nun die Eigenschwingungsformen dar als Summe dieser Näherungsfunktionen. Der wesentliche Vorteil etwa gegenüber einer Darstellung mit sinus-Gliedern liegt darin, daß jede höhere Eigenschwingungsform fast vollkommen von einer Näherungsfunktion dargestellt wird. Infolgedessen darf man je nach der gewünschten Genauigkeit von einer bestimmten Eigenschwingungsform an auf jegliche Korrektur verzichten.

Es sei h_n die n-te Funktion des Näherungssystems. Es ist

$$h_n = \sqrt[4]{V_l}\cdot\sin\pi\, n\,\eta\,,$$

dabei ist

$$\eta = \frac{\int_0^\xi \sqrt{V_l}\,d\,\xi}{\int_0^1 \sqrt{V_l}\,d\,\xi}\,; \qquad d\,\eta = \frac{\sqrt{V_l}\cdot d\,\xi}{\int_0^1 \sqrt{V_l}\,d\,\xi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Es sei eine Eigenschwingungsform dargestellt durch

$$y = \sum_n B_n \cdot h_n\,.$$

Daß die h tatsächlich die oben angegebene Eigenschaft besitzen, erkennt man daran, daß mit wachsendem n in den Ausdrücken für kinetische und potentielle Energie die gemischten Glieder $B_n \cdot B_m$ für $n \neq m$ gegenüber den rein quadratischen Gliedern immer kleiner werden. Zunächst werde die kinetische Energie berechnet.

$$K = \frac{1}{2}\,\frac{l}{v_0}\int_0^1 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \cdot d\,\xi = \frac{1}{2}\,\frac{l}{v_0}\int_0^1 \left(\sum_n \frac{d B_n}{d t}\,h_n\right)^2 d\,\xi\,.$$

Hier treten die Ausdrücke auf $\int_0^1 h_n \cdot h_m \cdot d\xi$. Es ist

$$\int_0^1 h_n \cdot h_m \cdot d\xi = \int_0^1 \sqrt{V_l} \cdot \sin n\pi\eta \cdot \sin m\pi\eta \cdot d\xi .$$

Führt man η nach Gl. (30) ein, so ergibt sich

$$\int_0^1 h_n \cdot h_m \cdot d\xi = \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi \cdot \int_0^1 \sin n\pi\eta \cdot \sin m\pi\eta\, d\eta .$$

Daher

$$\int_0^1 h_n^2 \cdot d\xi = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi , \qquad \int_0^1 h_n \cdot h_m \cdot d\xi = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m .$$

Also ist

$$K = \frac{l}{4\,v_0}\int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi \cdot \sum_n \left(\frac{d\,B_n}{d\,t^2}\right).$$

Nun soll die potentielle Energie berechnet werden. Nach Gl. (18) ist

$$\frac{p}{p_0} = P = \left(\frac{v}{v_0 \cdot V_l}\right)^{-\varkappa_l}.$$

Es sei

$$v - v_m = \Delta v .$$

Dann ist in der Nähe des mittleren Druckes

$$p = p_m - \varkappa_l \left(\frac{v_m}{v_0 \cdot V_l}\right)^{-(\varkappa_l + 1)} \cdot \frac{\Delta v}{v_0 \cdot V_l} \cdot p_0 , \qquad p = p_m - \varkappa_l \cdot \frac{p_0}{v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l} \cdot \frac{\Delta v}{V_l} \quad . \quad (31).$$

Damit erhält man die spezifische potentielle Energie

$$-\int_{v=v_m}^{v=v_m+\frac{\partial y}{\partial x}} p \cdot d\,v = -\int_{\Delta v=0}^{\Delta v=\frac{\partial y}{\partial x}} p\, d\,\Delta v = -p_m \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\varkappa_l \cdot p_0}{2\,v_0} \cdot \frac{P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l}}{V_l} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 .$$

Die gesamte potentielle Energie ist

$$\Pi = \int_0^{l\,v_0} d\,x \left(-p_m \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\varkappa_l \cdot p_0}{2\,v_0} \cdot \frac{P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l}}{V_l}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$= -p_m \cdot y \Big|_{x=0}^{x=l/v_0} + \frac{\varkappa_l \cdot p_0}{2\,l_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l} \int_0^1 \frac{1}{V_l}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \cdot d\xi$$

$$\Pi = \frac{\varkappa_l \cdot p_0}{2\,l_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l} \int_0^1 \frac{1}{V_l} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \cdot d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32).$$

Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_n B_n \cdot \frac{d\,h_n}{d\,\xi} .$$

Setzt man

$$D_{mn} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi \cdot \int_0^1 \frac{1}{V_l} \cdot \left(\frac{d\,h_n}{d\,\xi}\right) \cdot \left(\frac{d\,h_m}{d\,\xi}\right) \cdot d\xi ,$$

so ist

$$\Pi = \frac{\varkappa_l\, p_0 \cdot \pi^2}{l}\, P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l} \cdot \left(\int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi\right)^{-1} \cdot \left\{\sum B_n^2 \cdot D_{nn} + \sum_{m \neq n} B_m \cdot B_n \cdot D_{mn}\right\} ,$$

m und n gehen von 1 bis ∞.

Wir berechnen die D_{mn}. Es ist

$$\frac{d h_n}{d\xi} = \sqrt[4]{V_l}\cdot\frac{\pi\cdot n\sqrt{V_l}}{\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\cdot d\xi}\cdot\cos n\pi\eta + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt[4]{V_l^3}}\cdot\frac{d V_l}{d\xi}\cdot\sin n\pi\eta\,,$$

$$D_{mn} = 2\,m\,n\cdot\int\limits_0^1\cos n\pi\eta\cdot\cos m\pi\eta\cdot d\eta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\,d\xi\cdot\int\limits_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}(n\cdot\cos n\pi\eta\cdot\sin m\pi\eta + m\cos m\pi\eta\cdot\sin n\pi\eta)\,d\eta$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\left(\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\,d\xi\right)^2\cdot\int\limits_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_l^3}\cdot\sin n\pi\eta\cdot\sin m\pi\eta\cdot d\eta\,,$$

$$D_{mn} = 2\,m\,n\int\limits_0^1\cos n\pi\eta\cdot\cos m\pi\eta\cdot d\eta$$

$$+\frac{\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\cdot d\xi}{4\pi}\cdot\int\limits_0^1\frac{d V_l}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\{(n+m)\cdot\sin(n+m)\cdot\pi\cdot\eta-(n-m)\cdot\sin(n-m)\pi\eta\}\,d\eta$$

$$+\left(\frac{\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\cdot d\xi}{4\pi}\right)^2\cdot\int\limits_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_l^3}\{\cos(n-m)\pi\eta-\cos(n+m)\pi\eta\}\,d\eta\,.$$

Das erste Integral wird 0 für $n \neq m$ und wird 1/2 für $n = m$. Durch partielle Integration erhält man für das zweite Integral

$$\int\limits_0^1\frac{d V_l}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\{(n+m)\sin(n+m)\pi\eta-(n-m)\sin(n-m)\pi\eta\}\,d\eta$$

$$=\left(-\frac{d V_l}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\cdot\frac{1}{\pi}(\cos(n+m)\pi\eta-\cos(n-m)\pi\eta)\right)\Bigg|_0^1$$

$$+\int\limits_0^1\{\cos(n+m)\pi\eta-\cos(n-m)\pi\eta\}\cdot\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d V_l}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\cdot\frac{1}{\pi}\right)\cdot d\eta\,.$$

Das erste Glied ist 0, da $\cos(n+m)\pi = \cos(n-m)\pi$ für ganzzahlige n und m. Das zweite Glied stellt Fourierkoeffizienten einer endlichen Funktion dar und geht deshalb mit wachsendem $n+m$ bzw. $n-m$ gegen 0, bleibt aber auf alle Fälle endlich. Das gleiche gilt für das dritte Integral. Es bleiben also im Ausdruck für die potentielle Energie die gemischten Glieder unterhalb einer endlichen Schranke. Die Glieder mit B_n^2 wachsen wie n^2.

Nun lautet die m-te Lagrangesche Gleichung

$$\frac{\varkappa_l\cdot p_0\cdot\pi^2}{l}\cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l}\cdot\left(\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\cdot d\xi\right)^{-1}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\cdot D_{nm}+\frac{l}{4\,v_0}\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\cdot d\xi\cdot\frac{d^2 B_m}{d t^2}=0\,.$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{4\pi^2\cdot\varkappa_l\cdot p_0\cdot v_0}{l^2\,(\int\limits_0^1\sqrt{V_l}\,d\xi)^2}\cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l}=E$$

schreibt sich das Gleichungssystem ausführlicher:

$$\begin{array}{llll}
D_{11}\cdot B_1+\frac{1}{E}\cdot\frac{d^2 B_1}{d t^2} & +D_{12}\cdot B_2 & +D_{13}\cdot B_3 & +\cdots=0\,,\\
D_{21}\cdot B_1 & +D_{22}\cdot B_2+\frac{1}{E}\cdot\frac{d^2 B_2}{d t^2} & +D_{23}\cdot B_3 & +\cdots=0\,,\\
D_{31}\cdot B_1 & +D_{23}\cdot B_2 & +D_{33}\cdot B_3+\frac{1}{E}\cdot\frac{d^2 B_3}{d t^2} & +\cdots=0\,.\\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Daraus erhält man mit dem Ansatz $B_n = B_n^* \sin \nu t$ das folgende System linearer homogener Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\left(D_{11}-\frac{\nu^2}{E}\right)\cdot B_1^* + D_{12}\cdot B_2^* + D_{13}\cdot B_3^* + \cdots = 0,\\
&D_{21}\cdot B_1^* + \left(D_{22}-\frac{\nu^2}{E}\right)\cdot B_2^* + D_{23}\cdot B_3^* + \cdots = 0,\\
&D_{31}\cdot B_1^* + D_{32}\cdot B_2^* + \left(D_{33}-\frac{\nu^2}{E}\right)\cdot B_3^* + \cdots = 0.\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Die Rechnung werde numerisch für die $V_{l\alpha}$ des vorigen Abschnitts weitergeführt. Zunächst wird für die verschiedenen Werte ξ und damit auch für die verschiedenen Werte P_m der Ausdruck $\int_0^\xi \sqrt{V_l}\, d\xi$ bestimmt. Damit berechnet sich

$$\eta = \frac{\int_0^\xi \sqrt{V_l}\, d\xi}{\int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi}.$$

Außerdem ermittelt man für die verschiedenen P_m die Ausdrücke $\frac{d V_l}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}$ und $\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_l^3}$. Die Zahlenwerte finden sich in unserer Tabelle Zeile 5 bis 9.

Trägt man nun die beiden letzten Ausdrücke über η auf, so lassen sich die Integrale

$$n\cdot\int_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\cdot\sin n\pi\eta\, d\eta \qquad \text{und} \qquad \int_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_l^3}\cos n\pi\eta\, d\eta$$

mit dem harmonischen Analysator bestimmen. Man erhält folgende Ergebnisse:

n	$n\int_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\right)\cdot\sin n\pi\eta\, d\eta$	$\frac{n}{4\pi}\cdot\int_0^1\sqrt{V_l}\,d\xi\cdot\int_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{V_l^3}}\cdot\sin n\pi\eta\, d\eta$
1	— 0,078	— 0,0155
2	— 0,079	— 0,0157
3	— 0,125	— 0,0248
4	— 0,110	— 0,0218
5	— 0,150	— 0,0298
6	— 0,132	— 0,0262
7	— 0,170	— 0,0337
8	— 0,140	— 0,0278
9	— 0,190	— 0,0377
10	— 0,160	— 0,0318

Ist n groß und ungerade, so liefern die Integrale — 0,200 und — 0,0397; ist n groß und gerade, so erhält man — 0,162 und — 0,0321.

n	$\int_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_l^3}\cos n\pi\eta\cdot d\eta$	$\left(\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^1\sqrt{V_l}\,d\xi\right)^2\cdot\int_0^1\left(\frac{d V_l}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_l^3}\cdot\cos n\pi\eta\, d\eta$
0	0,0348	0,00157
1	0,0240	0,00095
2	0,0180	0,00071
3	0,0135	0,00053
4	0,0105	0,00041
5	0,0085	0,00034
6	0,0073	0,00028
7	0,0060	0,00024
8	0,0055	0,00022
9	0,0044	0,00017
10	0,0043	0,00017

Damit berechnet man die $D_{m\,n}$. Es ergibt sich als Matrix des Gleichungssystems für die B_n

$0{,}985 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0089$	$-0{,}0058$	$-0{,}0048$	$-0{,}0043$	$-0{,}0038$	$-0{,}0015$	$-0{,}0040$	$-0{,}0040$	$-0{,}0020$
$-0{,}0089$	$3{,}979 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0137$	$-0{,}0101$	$-0{,}0086$	$-0{,}0058$	$-0{,}0078$	$-0{,}0055$	$-0{,}0060$	$-0{,}0042$
$-0{,}0058$	$-0{,}0137$	$8{,}975 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0175$	$-0{,}0116$	$-0{,}0126$	$-0{,}0098$	$-0{,}0098$	$-0{,}0055$	$-0{,}0060$
$-0{,}0048$	$-0{,}0101$	$-0{,}0175$	$15{,}984 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0215$	$-0{,}0156$	$-0{,}0146$	$-0{,}0098$	$-0{,}0098$	$-0{,}0055$
$-0{,}0043$	$-0{,}0086$	$-0{,}0116$	$-0{,}0215$	$24{,}970 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0235$	$-0{,}0156$	$-0{,}0146$	$-0{,}0098$	$-0{,}0098$
$-0{,}0038$	$-0{,}0058$	$-0{,}0126$	$-0{,}0156$	$-0{,}0235$	$35{,}970 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0235$	$-0{,}0156$	$-0{,}0146$	$-0{,}0098$
$-0{,}0015$	$-0{,}0078$	$-0{,}0098$	$-0{,}0146$	$-0{,}0156$	$-0{,}0235$	$48{,}970 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0235$	$-0{,}0156$	$-0{,}0146$
$-0{,}0040$	$-0{,}0055$	$-0{,}0098$	$-0{,}0098$	$-0{,}0146$	$-0{,}0156$	$-0{,}0235$	$63{,}970 \quad \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0235$	$-0{,}0156$
$-0{,}0040$	$-0{,}0060$	$-0{,}0055$	$-0{,}0098$	$-0{,}0098$	$-0{,}0146$	$-0{,}0156$	$-0{,}0235$	$80{,}97 - \frac{\nu^2}{E}$	$-0{,}0235$
$-0{,}0020$	$-0{,}0042$	$-0{,}0060$	$-0{,}0055$	$-0{,}0098$	$-0{,}0098$	$-0{,}0146$	$-0{,}0156$	$-0{,}0235$	$99{,}97 - \frac{\nu^2}{E}$

Das Wesentliche an diesem Gleichungssystem ist, daß die von ν^2 freien Anteile der Koeffizienten in der Hauptdiagonale alle anderen Koeffizienten ganz bedeutend überwiegen. Um dies auszunützen, führen wir, ähnlich wie schon früher, einen Wert z ein, den wir allen jenen Gliedern beifügen, die gegenüber den Koeffizienten der Hauptdiagonale als klein erscheinen. Hier sind das alle Glieder außer eben der Hauptdiagonale. Die Lösung unseres Gleichungssystems wird dann als Taylorentwicklung nach z angesetzt.

$$B_k^* = 1\,,$$

$$B_h^* = \qquad z \cdot b_{h\,1} + z^2 \cdot b_{h\,2} \quad + \cdots \quad \text{für} \quad h \neq k\,,$$

$$\nu_k^2 = \nu_{k\,0}^2 + z \cdot \Delta\,\nu_{k\,1}^2 + z^2 \cdot \Delta\,\nu_{k\,2}^2 + \cdots\,.$$

Man setzt dies ein und verlangt, daß die Glieder gleicher Potenz in z für sich das Gleichungssystem erfüllen. Von z freie Glieder treten allein in der k-ten Gleichung auf. Sie liefern ν_k^2.

Die in z linearen Glieder sind in der k-ten Gleichung allein durch $\Delta\,\nu_{k\,1}^2$ vertreten; dies wird daher 0. Aus den anderen Gleichungen erhält man durch die Glieder mit z die Werte $b_{h\,1}$. Eine Berücksichtigung auch der in z quadratischen Glieder ist nicht mehr notwendig. Setzt man z wieder gleich 1, so ergibt sich für die ersten 10 Eigenschwingungsformen

$$g_1 = \quad h_1 + 0{,}0030\,h_2 + 0{,}0007\,h_3 + 0{,}0003\,h_4 + 0{,}0002\,h_5 + 0{,}0001\,h_6 \quad - \quad - \quad - \quad - \qquad \Big|\ \frac{\nu_1^2}{E} = 0{,}985$$

$$g_2 = -0{,}0030\,h_1 + \quad h_2 + 0{,}0027\,h_3 + 0{,}0008\,h_4 + 0{,}0004\,h_5 + 0{,}0002\,h_6 + 0{,}0002\,h_7 + 0{,}0001\,h_8 + 0{,}0001\,h_9 \quad - \qquad \Big|\ \frac{\nu_2^2}{E} = 3{,}979$$

$$g_3 = -0{,}0007\,h_1 - 0{,}0027\,h_2 + \quad h_3 + 0{,}0025\,h_4 + 0{,}0007\,h_5 + 0{,}0005\,h_6 + 0{,}0002\,h_7 + 0{,}0002\,h_8 + 0{,}0001\,h_9 + 0{,}0001\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_3^2}{E} = 8{,}975$$

$$g_4 = -0{,}0003\,h_1 - 0{,}0008\,h_2 - 0{,}0025\,h_3 + \quad h_4 + 0{,}0024\,h_5 + 0{,}0008\,h_6 + 0{,}0004\,h_7 + 0{,}0002\,h_8 + 0{,}0002\,h_9 + 0{,}0001\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_4^2}{E} = 15{,}984$$

$$g_5 = -0{,}0002\,h_1 - 0{,}0004\,h_2 - 0{,}0007\,h_3 - 0{,}0024\,h_4 + \quad h_5 + 0{,}0021\,h_6 + 0{,}0007\,h_7 + 0{,}0004\,h_8 + 0{,}0002\,h_9 + 0{,}0001\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_5^2}{E} = 24{,}970$$

$$g_6 = -0{,}0001\,h_1 - 0{,}0002\,h_2 - 0{,}0005\,h_3 - 0{,}0008\,h_4 - 0{,}0021\,h_5 + \quad h_6 + 0{,}0018\,h_7 + 0{,}0006\,h_8 + 0{,}0003\,h_9 + 0{,}0002\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_6^2}{E} = 35{,}970$$

$$g_7 = \quad - \quad - 0{,}0002\,h_2 - 0{,}0002\,h_3 - 0{,}0004\,h_4 - 0{,}0007\,h_5 - 0{,}0018\,h_6 + \quad h_7 + 0{,}0016\,h_8 + 0{,}0005\,h_9 + 0{,}0003\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_7^2}{E} = 48{,}970$$

$$g_8 = \quad - \quad - 0{,}0001\,h_2 - 0{,}0002\,h_3 - 0{,}0002\,h_4 - 0{,}0004\,h_5 - 0{,}0006\,h_6 - 0{,}0016\,h_7 + \quad h_8 + 0{,}0014\,h_9 + 0{,}0004\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_8^2}{E} = 63{,}970$$

$$g_9 = \quad - \quad - 0{,}0001\,h_2 - 0{,}0001\,h_3 - 0{,}0002\,h_4 - 0{,}0002\,h_5 - 0{,}0003\,h_6 - 0{,}0005\,h_7 - 0{,}0014\,h_8 + \quad h_9 + 0{,}0012\,h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_9^2}{E} = 80{,}97$$

$$g_{10} = \quad - \quad - \quad - 0{,}0001\,h_3 - 0{,}0001\,h_4 - 0{,}0001\,h_5 - 0{,}0002\,h_6 - 0{,}0003\,h_7 - 0{,}0004\,h_8 - 0{,}0012\,h_9 + \quad h_{10} \qquad \Big|\ \frac{\nu_{10}^2}{E} = 99{,}97$$

Man erkennt, daß der Ausdruck $y = \sqrt[4]{V_l} \cdot \sin n\,\pi\,\eta \cdot \sin \nu\,t$ für $n \geq 1$ als gute Näherungslösung für die Differentialgleichung der schwingenden Gassäule anzusehen ist. Dabei ist

$$\nu^2 = n^2 \cdot \pi^2 \cdot \varkappa_l \cdot p_0 \cdot v_0 \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l}\, l^{-2}\, \Big(\int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi\Big)^2 \quad \ldots\ldots \quad (33).$$

Daß hier für die Schwingung des gänzlich verbrannten Gemisches nur ganzzahlige n auftreten, hängt mit den Besonderheiten der Randbedingungen zusammen, ist aber nicht im Wesen der

Differentialgleichung begründet. Unsere Näherungslösung ist deshalb auch für gebrochene n brauchbar, wenn nur $n \geqq 1$ ist. Die V_{la} im teilweise verbrannten Gemisch ($x_v < l/v_0$) sind die gleichen, wie im gänzlich verbrannten Gemisch, deshalb gilt unsere Näherungslösung auch für die Bestimmung der Eigenschwingungsformen des teilweise verbrannten Gemisches. Ersetzt man n durch ν nach Gl. (33) und fügt noch einen Faktor B_l hinzu, so ist die Näherungslösung für das Verbrannte

$$y_l = B_l \cdot \sqrt[4]{V_l} \cdot \sin \frac{\nu l \cdot \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}} \cdot \eta \cdot \sin \nu t \quad \text{. . . . . (34).}$$

X. Die Eigenschwingungsformen des teilweise verbrannten Gemisches. Im Verbrannten wird die Eigenschwingungsform dargestellt durch Gl. (34). Im Unverbrannten heißt die entsprechende Lösung

$$y_r = B_r \cdot \sin \frac{\nu \cdot l (1-\xi)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}} \cdot \sin \nu t .$$

y_l und y_r sollen zusammen die g_k darstellen. Dann müssen an der Verbrennungsstelle Druck und Verschiebung übereinstimmen. Die Abweichung des Druckes an einer Stelle vom mittleren Drucke ergibt sich aus den Gl. (31) und (22). Man erhält die Gleichungen

$$B_{rk} \cdot \sin \frac{\nu_k \cdot l (1-\xi_v)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}} = B_{lk} \cdot \sqrt[4]{V_{lv}} \cdot \sin \frac{\nu_k \cdot l \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0 \cdot v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}} \cdot \eta_v$$

$$-B_{rk} \cdot \varkappa_r \frac{P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_r} \cdot \nu_k \cdot l}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}} \cdot \cos \frac{\nu_k \cdot l (1-\xi_v)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}}$$

$$= B_{lk} \cdot \varkappa_l \frac{P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)_l}}{V_{lv}} \left\{ \frac{\sqrt[4]{V_{lv}} \cdot \nu_k \cdot l \sqrt{V_{lv}}}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0 \cdot v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}} \cdot \cos \frac{\nu_k \cdot l \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0 \cdot v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}} \cdot \eta_v \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d \sqrt[4]{V_l}}{d\xi}\right)_v \cdot \sin \frac{\nu_k \cdot l \cdot \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0 \cdot v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}} \cdot \eta_v \right\} .$$

Hieraus

$$\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot \frac{\varkappa_l \cdot P_m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\varkappa_l}-\frac{1}{2\varkappa_r}}}{\varkappa_r \cdot \nu_k \cdot l\, 4\, V_{lv}^2} \left(\frac{dV_l}{d\xi}\right)_v + \sqrt{\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_{lv}}} \cdot P_m^{\frac{1}{2\varkappa_l}-\frac{1}{2\varkappa_r}} \cdot \cot \frac{\nu_k \cdot l \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\xi}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}} \cdot \eta_v$$

$$+ \cot \frac{\nu_k \cdot l (1-\xi_v)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}} = 0 .$$

Diese transzendente Gleichung für νl läßt sich durch Probieren lösen. Wir schreiben sie abgekürzt

$$\frac{a}{\nu_k \cdot l} + b \cdot \cot \nu_k \cdot l \cdot c + \cot \nu_k \cdot l \cdot d = 0 .$$

Für die a, b, c und d erhält man mit anderen Zahlenwerten

$$a = \frac{75{,}9}{V_{l\,v}^{\,2}} \cdot P_m^{0{,}936} \cdot \left(\frac{d\,V_l}{d\,\xi}\right) v \text{ m/sec}; \qquad b = \frac{1}{\sqrt{V_{l\,v}}} \cdot 0{,}958 \cdot P_m^{0{,}033};$$

$$c = \frac{\eta_v}{P_m^{0{,}903} \cdot 127 \text{ m/sec}}; \qquad d = \frac{(1-\xi_v)}{P_m^{0{,}870} \cdot 331 \text{ m/sec}}.$$

Diese Werte sind für die verschiedenen P_m und damit für die verschiedenen Lagen der Verbrennungsfront zu bestimmen. Dann ist die Gleichung für $\nu\, l$ zu lösen. (Zeile 10 bis 14 unserer Tabelle.) Damit berechnet sich

$$\frac{B_{l\,k}}{B_{r\,k}} = \frac{\vartheta \cdot \sin d \cdot \nu_k \cdot l}{\sqrt[4]{V_{l\,v}} \cdot \sin c \cdot \nu_k \cdot l}.$$

In den Knoten wird dieser Ausdruck unbestimmt. Dort erhält man aus der Forderung, daß im Verbrannten und Unverbrannten der Druck übereinstimmen soll:

$$\frac{B_{l\,k}}{B_{r\,k}} = \mp \sqrt{\frac{\varkappa_r}{\varkappa_l}} \cdot P_m^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varkappa_r} - \frac{1}{\varkappa_l}\right)} \sqrt[4]{V_{l\,v}}.$$

N o r m i e r u n g: Für die Eigenschwingungsformen soll Gl. (7) gelten:

$$\frac{1}{l^2} \int_0^1 g_k^{\,2}\, d\,\xi = 1.$$

Setzt man y_l und y_r für g_k ein, so erhält man die Bedingung

$$\left(\frac{B_{r\,k}}{l}\right)^2 \left\{ \left(\frac{B_{l\,k}}{B_{r\,k}}\right)^2 \cdot \int_0^1 \sqrt{V_l} \cdot d\,\xi \cdot \int_0^{\eta_v} \sin^2 \frac{\nu_k \cdot l \int_0^1 \sqrt{V_l}\, d\,\xi}{\sqrt{\varkappa_l \cdot p_0\, v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_l}}\, \eta \cdot d\,\eta + \int_{\xi_v}^1 \sin^2 \frac{\nu_k \cdot l\,(1-\xi)}{\sqrt{\varkappa_r \cdot p_0 \cdot v_0} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r}}\, d\,\xi \right\} = 1.$$

Hieraus ist $B_{r\,k}$ zu bestimmen. (Zeile 15 und 16 der Tabelle.)

Nun läßt sich q nach Gl. (23) berechnen. Mit unseren Zahlen ist

$$q = 1{,}35 \left(\frac{B_{r\,k}}{l}\right)^2 \cdot (\cos^2 \nu_k \cdot l \cdot d) \cdot \{c \cdot e^{-i\varphi} - 0{,}194\}\, \{7{,}27 \cdot P_m^{-0{,}256} - 0{,}253\}.$$

Um die Einwirkung von $c \cdot e^{-i\varphi}$ zu zeigen (Einfluß des Druckes auf die Verbrennungsgeschwindigkeit), setzen wir

$$c \cdot e^{-i\varphi} = 0, \qquad c \cdot e^{-i\varphi} = 1.$$

Die sich ergebenden Werte q sind als q_0 und q_1 unterschieden. (Zeile 18 und 19 der Tabelle.)

In den Versuchen wurden die Druckschwankungen am rechten Ende des Gefäßes gemessen. Deren Amplitude ist nach Gl. (22)

$$a_{k\,0} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa_r \cdot p_0}{v_0}} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r} \cdot \frac{B_{k\,r}}{l} \cdot \nu_k \cdot l.$$

Es sei K eine aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstante. Dann ist nach Gl. (17)

$$a_{k\,0} = K \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu_k}} \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^{\xi_v} q\, d\,\xi_v}.$$

Damit ist die Amplitude der Druckschwankung für eine beliebige Lage der Verbrennungsfront

$$K \cdot \sqrt{\nu_k} \cdot B_{r\,k} \cdot P_m^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa_r \cdot p_l}{v_0}} \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^{\xi_v} q\, d\,\xi_v}.$$

Es sei M das Verhältnis der Druckamplitude für eine beliebige Lage der Verbrennungsfront zur Druckamplitude für eine vorgegebene Lage der Verbrennungsfront (bei uns $\xi_v = 0$). Die Werte der vorgegebenen Lage tragen den Index 0. Es ist dann

$$M = \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu_{k\,0}}} \cdot \frac{B_{r\,k}}{B_{r\,k\,0}} \cdot \left(\frac{P_m}{P_{m\,0}}\right)^{\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)_r} \cdot e^{\frac{1}{2}\int_{\xi_{v\,0}}^{\xi_v} q \cdot d\,\xi_v}.$$

Verbrennung ohne Wärmeaustausch.

	P_m	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9	9,70
1	$1-\xi_v$	1	0,946	0,892	0,836	0,779	0,666	0,550	0,434	0,318	0,200	0,083	0
2	ξ_v	0	0,054	0,108	0,164	0,221	0,334	0,450	0,566	0,682	0,800	0,917	1
3	V_{la}	7,99	7,48	7,12	6,87	6,70	6,36	6,15	5,97	5,83	5,70	5,59	5,55
4	$dV_{la}/d\xi$	— 12,82	— 7,62	— 5,29	— 4,00	— 3,24	— 2,22	— 1,69	— 1,34	— 1,11	— 0,94	— 0,81	— 0,74
5	$\sqrt{V_{la}}$	2,828	2,726	2,670	2,620	2,590	2,520	2,480	2,445	2,416	2,388	2,366	2,356
6	$\int_0^\xi \sqrt{V_{la}}\,d\xi$	0	0,150	0,295	0,443	0,592	0,886	1,1754	1,463	1,748	2,032	2,311	2,498
7	η	0	0,060	0,1181	0,1773	0,237	0,354	0,471	0,585	0,700	0,813	0,924	1
8	$\frac{dV_{la}}{d\xi}\,\frac{1}{\sqrt{V_{la}^3}}$	— 0,567	— 0,373	— 0,278	— 0,220	— 0,1868	— 0,1383	— 0,1108	— 0,0938	— 0,0787	— 0,0688	— 0,0610	— 0,0566
9	$\left(\frac{dV_{la}}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{V_{la}^3}$	0,322	0,1392	0,0774	0,0493	0,0349	0,01913	0,01227	0,00882	0,00621	0,00472	0,00372	0,00320
10	a in $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$	— 15,3	— 15,2	— 15,2	— 15,2	— 15,3	— 15,3	— 15,4	— 15,5	— 15,4	— 15,4	— 15,4	— 15,3
11	b	0,3385	0,3560	0,3675	0,3776	0,3835	0,3985	0,407	0,417	0,423	0,429	0,434	0,439
12	c in $^0/(\text{m/sec})$	0	0,01876	0,02886	0,03524	0,03976	0,04565	0,0495	0,0524	0,0545	0,0559	0,0573	0,0582
13	d in $^0/(\text{m/sec})$	0,1734	0,1152	0,0847	0,0653	0,0519	0,0345	0,0234	0,01582	0,01012	0,00568	0,00211	0
14	$\nu_1 l$ in m/sec	1037	1142	1348	1590	1850	2375	2786	2980	3052	3080	3095	3098
15	B_{l1}/B_{r1}	1,760	1,234	0,888	0,723	0,645	0,657	0,861	1,142	1,345	1,449	1,487	1,487
16	B_{r1}/l	1,414	1,306	1,335	1,370	1,399	1,384	1,186	0,926	0,760	0,671	0,622	0,601
17	$q/(c\cdot e - i\varphi - 0{,}194)$	18,94	6,400	2,292	0,784	0,151	0,237	1,485	2,303	2,370	2,199	1,984	1,842
18	q_0	— 3,66	— 1,239	— 0,444	— 0,152	— 0,029	— 0,046	— 0,287	— 0,446	— 0,459	— 0,426	— 0,384	— 0,357

19	q_1	15,26	5,16	1,85	0,632	0,122	0,191	1,198	1,856	1,911	1,773	1,600	1,486
20	$\frac{1}{2}\int_0^{\xi v} q_0\, d\xi$	0	— 0,0627	— 0,0837	— 0,0914	— 0,0937	— 0,0943	— 0,1038	— 0,1259	— 0,1527	— 0,1787	— 0,2025	— 0,2178
21	$\frac{1}{2}\int_0^{\xi v} q_1\, d\xi$	0	0,2614	0,349	0,381	0,391	0,393	0,419	0,508	0,616	0,744	0,844	0,908
22	$e^{\frac{1}{2}\int_0^{\xi v} q_0\, d\xi}$	1	0,939	0,920	0,912	0,911	0,910	0,900	0,882	0,858	0,836	0,816	0,803
23	$e^{\frac{1}{2}\int_0^{\xi v} q_1\, d\xi}$	1	1,296	1,417	1,394	1,478	1,481	1,520	1,662	1,852	2,105	2,325	2,478
24	M_0	1	1,295	1,806	2,429	3,129	4,505	5,029	4,651	4,293	4,173	4,196	4,264
25	M_1	1	1,780	2,783	3,711	5,079	7,329	8,487	8,770	9,281	10,513	11,950	13,155

Temperatur im Verbrannten in jedem Augenblick konstant.

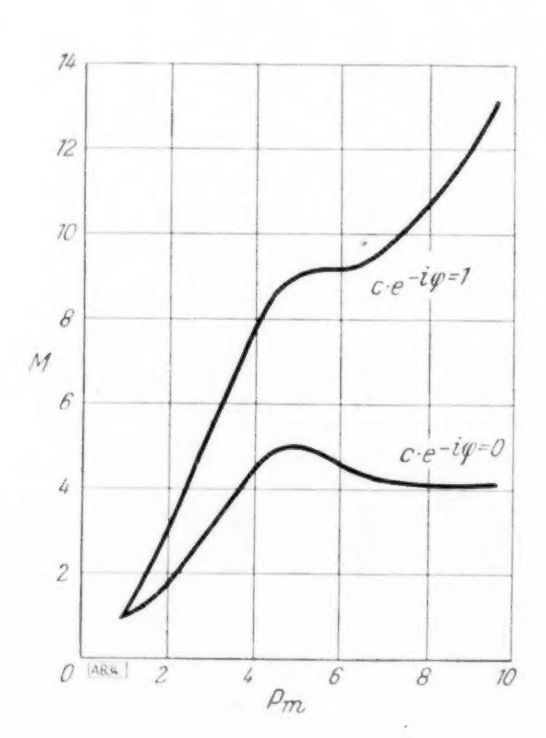
26	V_l	7,99	7,73	7,51	7,34	7,19	6,97	6,78	6,64	6,51	6,40	6,31	6,25
27	$\nu_1 l$ in m/sec	1037	1143	1348	1590	1854	2388	2808	3003	3064	3089	3095	3099
28	B_{r1}/l	1,414	1,308	1,335	1,374	1,405	1,392	1,186	0,920	0,744	0,653	0,612	0,595

Die Werte M für $c \cdot e^{-i\varphi} = 0$ und $c \cdot e^{-i\varphi} = 1$ (M_0 und M_1) finden sich in Zeile 24 und 25 unserer Tabelle. Sie sind in dem beigegebenen Diagramme als Funktion von P_m aufgetragen.

XI. Vorgänge bei konstanter Temperatur im Verbrannten. Es soll angenommen werden, daß der Wärmeaustausch im Innern eines sehr gut isolierten Gefäßes so stark ist, daß die Temperatur im Verbrannten als konstant angesehen werden kann. Kleine Abweichungen durch jene an der Verbrennungsstelle anzubringende periodische Wärmequelle mögen jedoch zugelassen werden; d. h. der Wärmeaustausch soll nicht so stark sein, daß die Massenkräfte, die durch den Wärmeaustausch entstehen, berücksichtigt werden müssen. Diese Verhältnisse können bei langsam brennenden Gemischen eintreten. Da keine Wärme nach außen verloren gehen soll, bleibt unter der Voraussetzung konstanter spezifischer Wärmen im Verbrannten und im Unverbrannten der Zusammenhang zwischen ξ_v und P_m unverändert. V_l tritt jetzt als Funktion nur von ξ_v auf. Man erhält aus der Bedingung, daß der Raum des Gefäßes erfüllt sein muß,

$$V_l = \frac{P^{\frac{1}{\varkappa_l}} - (1 - \xi_v) \cdot P^{\frac{1}{\varkappa_l} - \frac{1}{\varkappa_r}}}{\xi_v} .$$

Die Berechnung der Eigenschwingungsformen wird hier ziemlich einfach. Die Werte $\nu\, l$ und B_r, die für die weiteren Berechnungen ausschlaggebend sind, unterscheiden sich fast überhaupt nicht von den Werten des vorigen Beispiels (Zeile 27 und 28 der Tabelle). Deshalb dürften auch die weiteren Ergebnisse fast vollkommen übereinstimmen. Daraus ergibt sich, daß der Wärmeaustausch im Innern für das Versuchsergebnis überhaupt nicht wesentlich ist. Die Wärmeverluste nach außen lassen sich bei einem wirklich ausgeführten Versuch abschätzen aus dem Unterschied zwischen p_{m1} und dem tatsächlich erreichten Verbrennungsenddruck. So dürfte der Versuch so viel Daten liefern, daß wir auf Grund der hier entwickelten Theorie Aussagen über die Vorgänge an der Verbrennungsstelle machen können.



Zusammenfassung. Das in der Einleitung formulierte Problem wird in geschlossener Form gelöst. An zwei Beispielen mit extremen Annahmen über den Wärmeaustausch im Innern wird gezeigt, daß dieser für das Meßergebnis unwesentlich ist. Maßgebend für das Versuchsergebnis ist die Einflußnahme des Druckes auf die Verbrennungsgeschwindigkeit. Durch Anwendung der Theorie auf Versuche scheint es möglich, diesen Einfluß zu klären. Zur Bestimmung der Eigenschwingungsformen der nicht homogenen Gassäule wird ein Verfahren angewendet, das auch bei anderen Schwingungsproblemen von Vorteil sein kann.

Die Bekanntschaft mit dem Problem verdanke ich Herrn Professor Nägel. Herrn Professor Weber bin ich für das warme Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, seine fördernde Kritik und für viele wertvolle Ratschläge bei der endgültigen Fassung verbunden. Darüber hinaus fühle ich mich in ganz besonderem Maße Hern Professor Trefftz verpflichtet. Ich betrachte diese Arbeit als eine Frucht der Anregungen, die ich in seinen Vorlesungen und Seminaren empfing. 834

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur numerischen Auswertung des Poissonschen Integrals. Ist der Realteil $R(\psi)$ einer im Äußeren und auf dem Rande eines Kreises definierten analytischen Funktion auf dem Rande des Kreises $(0 \leqq \psi \leqq 2\pi)$ bekannt, so ist der zugehörige Imaginärteil $J(\varphi)\,(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ bis auf eine Konstante durch das Poissonsche Integral[1]) gegeben:

$$J(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\psi)\operatorname{cotg}\frac{\varphi-\psi}{2}\,d\psi.$$

Da dieses Integral in der angewandten Mathematik, vor allem in der Aerodynamik, häufig auftritt, sollen im folgenden zwei Verfahren zu seiner numerischen Auswertung angegeben werden[2]). Das erste (A. Walz) hat den Vorzug, stärker schematisiert und daher im allgemeinen schneller durchführbar zu sein, während das zweite (W. Mangler) etwas mehr Übung erfordert, dafür aber in vielen Fällen eine größere Genauigkeit hat, vor allem bei Realteilkurven mit steilen Extremwerten. Der Realteil $R(\psi)$ wird als endlich und stetig vorausgesetzt.

I. Der Grundgedanke des ersten Verfahrens, das an einen Vorschlag von T. Theodorsen[3]) anknüpft, ist folgender:

Teilt man die Kurve $R(\psi)$ in hinreichend kleine Intervalle (Breite $\Delta\psi_m$) auf und nimmt in diesen Intervallen sowohl für die Funktion $R(\psi)$ als auch für den ctg die Werte in der Intervallmitte ψ_m als Mittelwerte an, so liefern je 2 gleich große und symmetrisch zum Aufpunkt φ gelegene Intervalle m und $(-m)$ zum Gesamtintegralwert den Beitrag

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}(R_m - R_{-m})\cdot\operatorname{ctg}\frac{|\psi_m-\varphi|}{2}\cdot\Delta\psi_m\\ = \frac{1}{\pi}\,a_m\cdot(R_m - R_{-m})\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Werte

$$a_m = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{|\psi_m-\varphi|}{2}\,\Delta\psi_m \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sind dabei durch die gewählte Lage und Größe der Intervalle festliegende Konstanten[4]).

[1]) Vgl. z. B. Hurwitz-Courant: Funktionentheorie, 3. Aufl., Berlin (1929), S. 322.

[2]) Vgl. auch F. Weinig: Rechenpapiere zum Integrieren durch Auszählen, ZAMM 17 (1937), S. 369.

[3]) T. Theodorsen: Theory of wing sections of arbitrary shape. National Advisory Comitee for Aeronautics. Rep. Nr. 411 (1931).

T. Theodorsen and I. E. Garrick: General potential theory of arbitrary wing sections. NACA Rep. Nr. 452 (1933).

[4]) Theodorsen legt der Berechnung der Konstanten a_m nicht den Wert des ctg in der Intervallmitte ψ_m, sondern den mittleren Wert des ctg in den einzelnen Intervallen zugrunde, definiert also

$$a_m^* = \frac{1}{2}\int_{\psi_m-\frac{1}{2}\Delta\psi_m}^{\psi_m+\frac{1}{2}\Delta\psi_m}\operatorname{ctg}\frac{\psi-\varphi}{2}\,d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a).$$

Die Werte a_m^* fallen in der Nähe des Aufpunktes φ etwas größer aus als die Werte a_m. Vergleichende (zur Ausschaltung von graphischen Fehlern rechnerisch durchgeführte) J-Wert-Bestimmungen zu Realteil-Kurven mit bekanntem Imaginärteil ergaben mit den Werten a_m bessere Übereinstimmung mit den Sollwerten als mit den Werten a_m^*. Das bessere Ergebnis mit den Werten a_m erklärt sich damit, daß Gl. (2) bzw. (1) in der Umgebung von φ auch dann noch mit guter Annäherung gilt, wenn $R(\psi)$ in diesem Bereich nicht näherungsweise konstant ist, sondern steil ansteigt oder abfällt.

Die beiden am Aufpunkt φ beginnenden Intervalle erfordern wegen des Unendlichwerdens des ctg im Punkt $\psi = \varphi$ eine besondere Betrachtung.

Bei kleiner Intervallbreite $\Delta\psi$ kann $R(\psi)$ in diesen Intervallen als linear, d. h. als darstellbar durch

$$R(\psi) = R_\varphi + \left(\frac{dR}{d\psi}\right)_\varphi\cdot(\psi-\varphi) \quad . \quad . \quad (3),$$

angenommen und

$$\operatorname{ctg}\frac{\psi-\varphi}{2} = \frac{1}{\frac{\psi-\varphi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gesetzt werden. Der Beitrag der beiden Intervalle zum Gesamt-Integralwert ist dann

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\Delta\psi}^{\varphi+\Delta\psi}\left[R_\varphi + \left(\frac{dR}{d\psi}\right)_\varphi(\psi-\varphi)\right]\cdot\frac{2}{\psi-\varphi}\,d\psi\\ = \frac{2}{\pi}\,\Delta\psi\cdot\left(\frac{dR}{d\psi}\right)_\varphi = \frac{1}{\pi}\cdot(R_0 - R_{-0})\end{aligned}\right\} \quad . \quad (5),$$

wobei R_0 und R_{-0} die Werte von $R(\psi)$ an den Stellen $\varphi + \Delta\psi$ bzw. $\varphi - \Delta\psi$ sind.

Für das Poissonsche Integral kann dann geschrieben werden

$$\left.\begin{aligned}J(\varphi) = \frac{1}{\pi}\Big[a_0(R_0 - R_{-0}) + a_1(R_1 - R_{-1})\\ + a_2(R_2 - R_{-2})\\ + \cdots + a_n(R_n - R_{-n})\Big] \quad (a_0 = 1)\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6).$$

Die Bildung der Produkte $a_m R_m$ und $-a_m R_{-m}$ und die nachfolgende Addition nach der Vorschrift der Gl. (6) läßt sich nun mit Hilfe eines Fluchtlinien-Netzes mit Intervall-Mittellinien nach Art der Abb. 1 in einfacher Weise graphisch durchführen. Die Neigung der Strahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots$ bzw. $-a_0, -a_1, -a_2 \ldots$ gegen die Gerade $G_{(+)}$ bzw. $G_{(-)}$ ist proportional den Werten a_n, und man erkennt leicht, daß dann die in der Abbildung dick ausgezogenen waagerechten Strecken die Produkte $a_m R_m$ bzw. $-a_m R_{-m}$ darstellen. Die Addition dieser Strecken (der positiven und negativen je für sich) kann man bequem mit Hilfe der Millimeterteilung eines mit der Reißschiene parallel geführten (nicht zu kurzen) Rechenschiebers vornehmen, an dessen Läufer man einen über der Millimeterteilung schleifenden Papierzeiger festgeklebt hat. (Vorschlag in „Hütte I", 26. Aufl., S. 181).

Bei der praktischen Durchführung des Verfahrens zeichnet man zunächst die Kurve $R(\psi)$ einschließlich der Gradeinteilung der ψ-Achse auf durchsichtiges Papier durch und ergänzt sie nach beiden Seiten hin um je 180°. Um den Wert J an der Stelle φ zu bestimmen, spannt man die Kurve $R(\psi)$ so über das (während der ganzen Ermittlung festliegende) Fluchtliniennetz, daß der Punkt φ auf die Symmetrielinie des Fluchtlinien-Netzes fällt. Da wegen

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\psi-\varphi}{2}\,d\varphi = 0$$

zu der Funktion $R(\psi)$ eine beliebige Konstante addiert werden kann, ist es gleichgültig, in welchem Abstand die ψ-Achse der Kurve $R(\psi)$ über der Geraden $0_1\,0_2$ des Fluchtlinien-Netzes liegt (Abb. 1). Aus Genauigkeitsgründen wird man diesen Abstand,

wie auch den Auftragungsmaßstab für die Neigung der Strahlen a_m und $-a_m$, nicht zu klein wählen. Bei unregelmäßig und steil verlaufenden R-Kurven erhält man meist etwas streuende J-Werte. Den richtigen Verlauf der J-Kurve findet man in diesem Fall durch Ermittlung einer hinreichenden Zahl von Kurvenpunkten. Eine gewisse Kontrolle des Ergebnisses hat man in der Bedingung, daß

$$\int_0^{2\pi} J(\varphi)\, d\varphi = 0$$

sein muß.

Beim Entwurf solcher Fluchtlinien-Netze sind noch folgende Gesichtspunkte zu beachten:

Um bei einem bestimmten geforderten Genauigkeitsgrad mit einer möglichst kleinen Zahl von Intervallen (d. h. möglichst kleinem Arbeitsaufwand) auszukommen, ist es vorteilhaft, die Intervalle in der Nähe des Aufpunktes, die in der Regel große Beiträge zum Gesamt-Integralwert liefern, klein und in weiterer Entfernung davon größer zu wählen. Je nach dem geforderten Genauigkeitsgrad wird man zweckmäßig Breite und Zahl der Intervalle wieder verschieden wählen. Die Abbildung zeigt z. B. eine Intervallteilung, die bei regelmäßigen R-Kurven der angedeuteten Art gute Ergebnisse liefert. Einander zugeordnete Linien a_m und Intervall-Mittellinien m kennzeichnet man zweckmäßig durch Anlegen mit gleicher Farbe. Es empfiehlt sich, das Netz auf verzerrungsfreiem Papier zu zeichnen.

II. Das zweite Verfahren beruht auf folgenden Überlegungen: Setzen wir:

$$\psi - \varphi = \chi, \quad x = \sin\frac{1}{2}\chi, \quad R(\psi(x)) = y(x),$$

so wird

$$J(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} R(\psi)\cot\!g\,\frac{\varphi-\psi}{2}\, d\psi$$

$$= +\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} R(\varphi+\chi)\cot\!g\left(\frac{1}{2}\chi\right) d\chi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} y(x)\frac{dx}{x}.$$

Da $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = 0$ ist, berechnen wir statt dessen das Integral

$$J(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(x)-y(0)}{x}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} z(x)\, dx \quad (7).$$

Zu seiner numerischen Auswertung hätte man den Integranden $z(x) = \frac{y(x)-y(0)}{x}$ über x aufzutragen und den Flächeninhalt $F = \int_{-1}^{+1} z(x)\, dx$ zu bestimmen, indem die Kurve $z(x)$ durch eine Treppenkurve $z(x) = z_j$ $(x_j \leq x \leq x_j + \Delta x_j)$ ersetzt wird: $F = \Sigma z_j \Delta x_j$.

Anstatt nun die Kurve $R(\psi)$ in die (x, z)-Ebene umzuzeichnen, was für jeden Wert von φ besonders geschehen müßte, können wir auch die Werte x_j und z_j bestimmen, indem wir die Realteilkurve auf ein Netz legen, aus dem wir die zu jedem Punkt gehörigen Werte (x, z) sofort ablesen können. Dieses besteht aus den Geraden $\chi = \psi - \varphi = 2\arcsin x = 2\arcsin x_j$ und den Kurven

$$R^*(\chi) = R(\psi) - R(\varphi) = z(x)\cdot x = z_j \sin\frac{1}{2}\chi$$

(Abb. 2). Die Gestalt dieses Netzes ist unabhängig von φ und das (x, R^*)-Koordinatensystem des Netzes unterscheidet sich von dem (ψ, R)-Koordinatensystem des Realteiles nur durch eine Parallelverschiebung. Wir müssen also die (am besten für 2 Perioden $(0 \leq \psi \leq 4\pi)$) auf durchsichtiges Papier gezeichnete Kurve $R(\psi)$ so auf das Netz legen, daß sein Nullpunkt mit dem Punkt $\psi = \varphi$, $R(\psi) = R(\varphi)$ zusammenfällt. Dann muß man die von der Kurve $R(\psi)$ und der x-Achse des Netzes bestimmte Fläche in dem Netz durch eine Treppe aus Sinuskurvenstücken

$$R^* = z_j \cdot \sin\frac{1}{2}\chi\left(x_j \leq \sin\frac{1}{2}\chi \leq x_j + \Delta x_j\right)$$

annähern: $F = \Sigma z_j \Delta x_j$. Falls die Intervallbreite Δx_j nicht zu groß ist $(\Delta x_j = 0{,}05$ oder $0{,}1)$, kann man die Flächenverzerrung beim Übergang aus der (x, z)-in die Netzebene „im kleinen" vernachlässigen, abgesehen von der Umgebung des Punktes $x = 0$. Falls sich hier die Kurve $R(\psi)$ nicht an eine der Netzkurven $R = z_j \cdot \sin\frac{1}{2}\chi$ gut anschmiegt, müssen wir für die Umgebung von $x = 0$, etwa für $-0{,}15 \leq x \leq +0{,}15$, das Teilintegral $J_0 = \int_{-0{,}15}^{+0{,}15} z(x)\, dx$ besser nach der Integrationsformel von Gauß[5]) bestimmen.

Dazu nehmen wir an, daß sich die Funktion $R(\psi) = y(x)$ in diesem Bereich durch ein Polynom höchstens 4. Grades, also $z(x)$ durch ein Polynom 3. Grades annähern läßt. Dann ist das Integral J_0 durch 2 Werte des Integranden darstellbar:

$$J_0 = 0{,}15\cdot[z(x_{-1}) + z(x_1)],$$

$$\left(x_{-1} = -x_1 = -\frac{0{,}15}{\sqrt{3}} = -0{,}08661\right).$$

Zur Bestimmung der Werte $z(x_1)$ und $z(x_{-1})$ sind an den entsprechenden Stellen des Netzes (Abb. 2) Skalen angebracht worden.

Wegen $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = 0$ können wir uns jetzt auch von der Forderung freimachen, daß $z(0) = 0$ sein muß. Die Kurve $R(\psi)$ muß so auf das Netz gelegt werden, daß der Wert $\psi = \varphi$ mit der Mittellinie des Netzes zusammenfällt. Die Kurve kann dann noch so verschoben werden, daß die Ablesung der Werte z_j möglichst bequem wird. Damit wird

$$F = \pi\cdot J(\varphi) = U\,\{0{,}15\cdot(z(x_{-1}) + z(x_{+1})) + \Sigma' z_j \Delta x_j\},$$

wobei die Summe über die Intervalle $-1 \leq x \leq -0{,}15$ und $0{,}15 \leq x \leq 1$ zu erstrecken ist und U einen Umrechnungsfaktor bezeichnet, nämlich die Zahl der $R(\psi)$-Einheiten, die der Einheit der Ordinatenachse des Netzes entsprechen.

Da in der Nähe von $x = \pm 1$ der Flächenmaßstab des Netzes gegenüber der (x, z)-Ebene ebenfalls stark verzerrt ist, wählt man hier die Intervalle Δx_j zweckmäßig etwas kleiner. Da aber diese Bereiche zum Gesamtintegral F nur wenig beitragen, ist ein hier etwa vorkommender Fehler von geringer Bedeutung.

Als Kontrolle für die Rechnung läßt sich auch hier die Beziehung $\int_0^{2\pi} J(\varphi)\, d\varphi = 0$ verwenden.

[5]) Vgl. z. B. Runge-König: Numerisches Rechnen. Berlin 1924, S. 275.

Falls man im Auszählen in dem Netz der Abb. 2 einige Übung hat, braucht man bei Verwendung einer Addiermaschine oder eines Addiators für die Ermittlung eines Wertes $J(\varphi)$ 10 bis 15 Minuten, also für die Bestimmung des Imaginärteiles etwa 4 bis 5 Stunden, wenn man die Kurve an 20 Punkten berechnet. Der Zeitaufwand ist demnach kleiner als bei Verwendung der harmonischen Analyse und Synthese, ohne daß die Genauigkeit des geschilderten Verfahrens geringer ist. Bei dem zuerst dargestellten Verfahren (Zahl der Intervalle wie in Abb. 1) braucht man nur etwa 3 Stunden, wobei man allerdings eventuell eine etwas größere Ungenauigkeit in Kauf nehmen muß[6]).

Göttingen. W. Mangler, A. Walz. 846

[6]) Bei profiltheoretischen Aufgaben (Ermittlung der Druckverteilung zu einem beliebigen Profil, Bestimmung des Profils zu einer vorgegebenen Druckverteilung) erprobte Netze (Abb. 1 und 2) können als verzerrungsfreie Pausen von der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen bezogen werden.

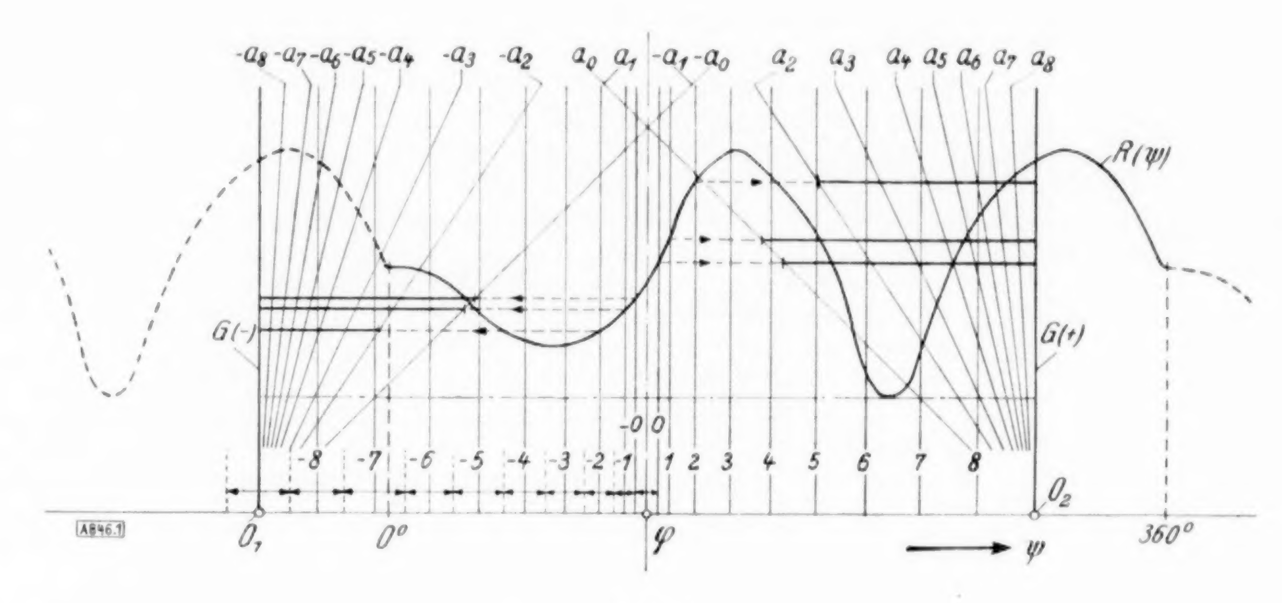


Abb. 1.

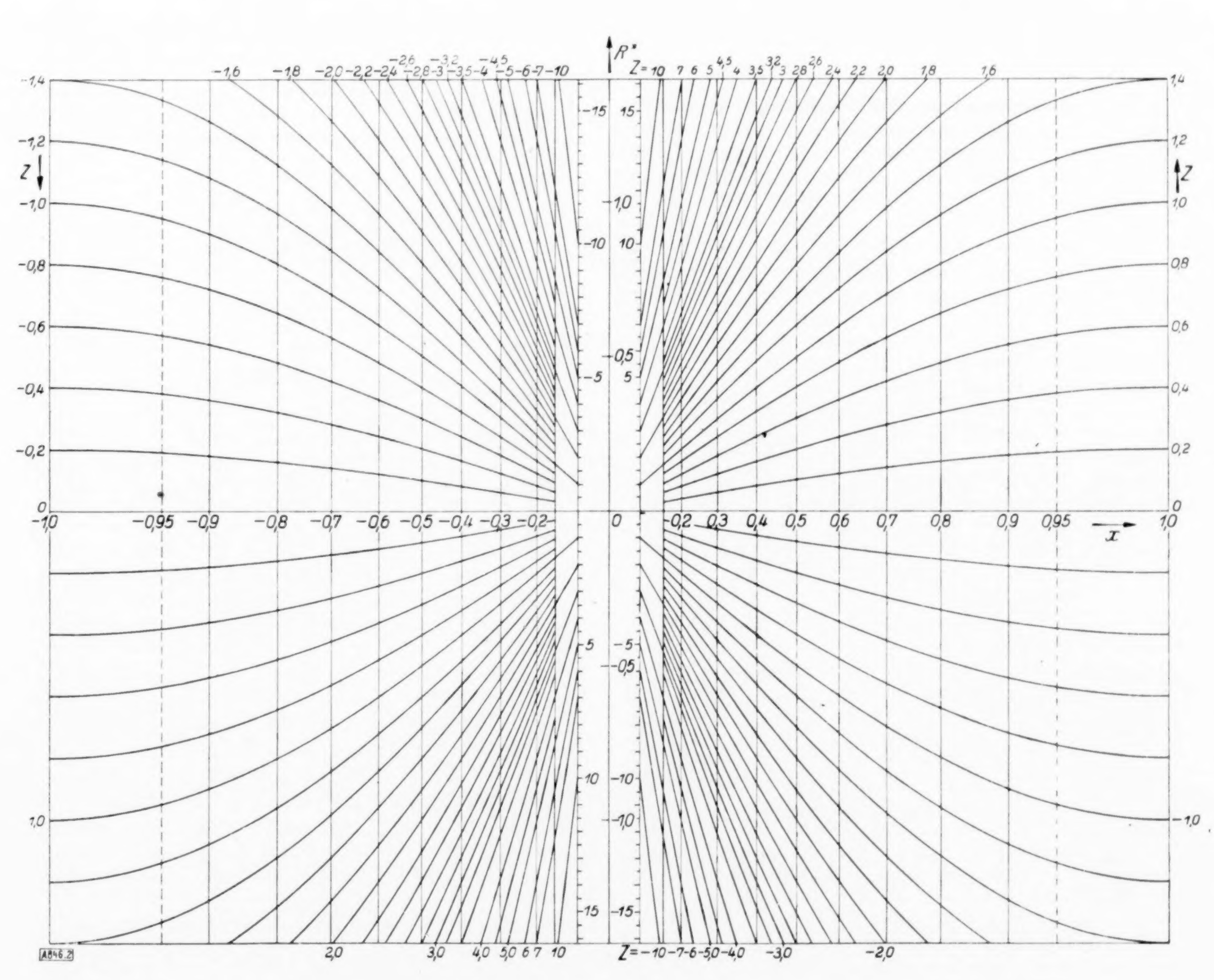


Abb. 2.

Zur optischen Abbildung von Strahlensystemen.

1. Einleitung. Unter einer optischen Abbildung versteht man die durch irgendein optisches System erzeugte Abbildung der Strahlen eines Dingraums auf die Strahlen eines Bildraums. Ding- und Bildraum sollen optisch homogen-isotrop (Brechungszahlen n, n'), die Ding- und Bildstrahlen also geradlinig sein. Außerdem setzen wir voraus, daß die Abbildung geradenweise eineindeutig sei, was sich durch Beschränkung auf nicht zu große Ausschnitte des Ding- und Bildraums und durch gewisse Stetigkeitsforderungen für die brechenden oder spiegelnden Flächen des optischen Systems stets erreichen läßt.

Bekanntlich [1]) kann nicht jede eineindeutige Geradenabbildung zweier Räume als optische Abbildung verwirklicht werden, sondern die optische Realisierbarkeit ist an gewisse Bedingungen gebunden. Daraus folgt, daß zwei durch eine optische Abbildung verkoppelbare Strahlensysteme Σ, Σ' (= 2-parametrige Geradenmengen) nicht voneinander unabhängig sind, sondern in einer besonderen gegenseitigen Beziehung stehen müssen. Das Ziel der folgenden Ausführungen ist es, für diese Beziehung eine meines Wissens bisher noch nicht bemerkte liniengeometrische Deutung (Nr. 4) zu entwickeln; sie ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff der Poincaréschen Integralinvarianten (Nr. 2) und einem Integralsatz von W. Blaschke (Nr. 3) und ist sowohl auf Strahlensysteme mit reellen als auch auf solche mit imaginären Brennflächen anwendbar [2]).

Die Arbeit ist so geschrieben, daß sie auch ohne besondere Vorkenntnisse aus der Strahlenoptik und der differentiellen Liniengeometrie verstanden werden kann.

2. Poincarésche Integralinvariante. Eine eineindeutige Geradenabbildung ist, wie schon in der Einleitung festgestellt, im allgemeinen keine optische Abbildung. Eine notwendige Bedingung der optischen Realisierbarkeit liefert die Poincarésche Integralinvariante, für die wir hier die Deutung von G. Prange zugrunde legen [3]):

Wir betrachten eine beliebige „Strahlenröhre" des Dingraums (Abb. 1) und die entsprechende Strahlenröhre des Bildraums.

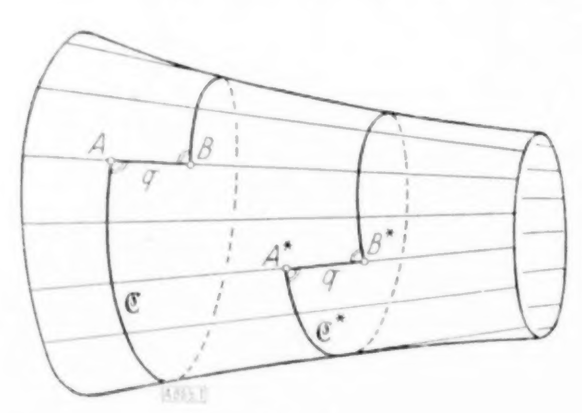


Abb. 1.

Eine Kurve $\mathfrak{C}$, die die Geraden der Strahlenröhre des Dingraums senkrecht schneidet, endet nach einem vollen Umlauf in einem Endpunkt B, der vom Anfangspunkt A verschieden sein kann. Die Entfernung $q = AB = A^*B^*$ ist von der Lage des Anfangspunktes A unabhängig; denn zwei von verschiedenen Punkten A, A^* ausgehende Kurven $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^*$ schneiden die Strahlen der Röhre äquidistant. Über das Vorzeichen von q wird eine geeignete Verabredung getroffen. Hat q' die analoge Bedeutung für die entsprechende Strahlenröhre des Bildraums, dann gilt bei jeder optischen Abbildung notwendig

$$n q = n' q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$n q$ ist also eine optische Invariante und heißt Poincarésche Integralinvariante.

3. Zwischenbemerkung aus der Liniengeometrie. Wir stellen hier die im folgenden benötigten Tatsachen aus der Liniengeometrie der Strahlensysteme (= 2-parametrigen Geradenmengen) kurz zusammen [4]):

a) Sphärisches Bild eines Strahlensystems.

Trägt man von einem festen Anfangspunkt O aus zu den Geraden eines Strahlensystems parallele Einheitsvektoren ab, so wird jedem Systemstrahl ein Punkt der Einheitskugel um O zugeordnet. Einem durch eine Strahlenröhre begrenzten Ausschnitt des Strahlensystems entspricht ein Flächenstück der Einheitskugel als sphärisches Bild. Mit df soll das Flächenelement des sphärischen Bildes bezeichnet werden.

b) Mittlerer Drall eines Strahlensystems.

Eine 1-parametrige Strahlenmenge bildet eine Strahlenfläche. Unter dem Drall d einer Strahlenfläche versteht man den Grenzwert

$$d = \lim_{\varphi \to 0} h/\varphi ,$$

wobei φ den Winkel und h den kürzesten Abstand zweier Geraden der Strahlenfläche bedeutet (Abb. 2); je nach dem „Schraubsinn" wird d positiv

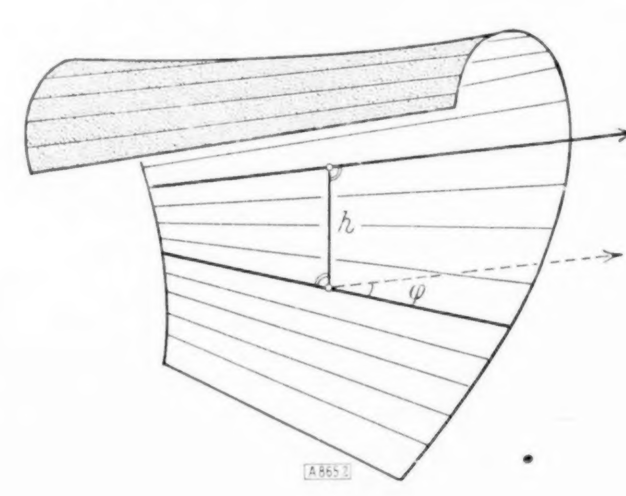


Abb. 2.

bzw. negativ gerechnet. Bei abwickelbaren Flächen, z. B. Kegelflächen, ist $d = 0$; Strahlenflächen mit $\varphi = 0$, also insbesondere Zylinderflächen, schließen wir fortan aus.

Wir betrachten nun alle in einem Strahlensystem enthaltenen Strahlenflächen, die einen festen Systemstrahl p gemeinsam haben. Die Drallwerte, welche diese Strahlenflächen bei dem festen Strahl p erreichen, liegen zwischen zwei Extremwerten d_{max} und d_{min}. Das arithmetische Mittel

$$D = \frac{1}{2}\,(d_{max} + d_{min})$$

soll mittlerer Drall des Strahlensystems heißen.

[1]) Vgl. M. Herzberger: Über die Umgebung eines Strahls in optischen Systemen, ZAMM Bd. 10 (1930), Seite 467 bis 486.

[2]) Eine andere, jedoch nur auf Strahlensysteme mit reellen Brennflächen bezügliche geometrische Deutung findet sich bei C. Carathéodory: Geometrische Optik (Erg. der Math. und ihrer Grenzgeb., Bd. IV, Heft 5, 1937), S. 79 bis 81.

[3]) Vgl. das in Fußnote [2]) genannte Buch, Seite 33.

[4]) Die Beweise kann man nachlesen bei W. Blaschke: Differentialgeometrie I, 3. Aufl. (1930), Seite 277 bis 281.

c) Integralsatz von Blaschke.

Für einen von einer Strahlenröhre begrenzten Ausschnitt eines Strahlensystems gilt nach W. Blaschke

$$q = \int D\,df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierbei hat q für die begrenzende Strahlenröhre die in Nr. 2 erklärte Bedeutung, D ist der von Strahl zu Strahl veränderliche mittlere Drall des Strahlensystems und df das Flächenelement des sphärischen Bilds. Das Flächenintegral des mittleren Dralls wurde erstmalig von E. Cartan eingeführt.

4. Optische Abbildung eines Strahlensystems. Mit Hilfe der in Nr. 3 bereitgestellten liniengeometrischen Begriffe ergibt sich jetzt folgende notwendige Bedingung für zwei durch eine optische Abbildung verkoppelbare Strahlensysteme Σ, Σ':

Zu jedem Paar zugeordneter Strahlen von Σ, Σ' gehört eine gewisse Flächenvergrößerung $\omega' = \frac{df'}{df}$ der sphärischen Bilder und ein gewisses Verhältnis $\frac{D'}{D}$ der mittleren Drallwerte. ω', $\frac{D'}{D}$ und die Brechungszahlen n, n' sind bei jeder optischen Abbildung durch die Gleichung

$$\frac{n'}{n} \cdot \frac{D'}{D} \cdot \omega' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

verknüpft.

Beweis: Aus (1) und (2) folgt für irgend zwei durch einander entsprechende Strahlenröhren begrenzte Ausschnitte von Σ, Σ'

$$n \int D\,df = n' \int D'\,df'.$$

Indem man die Strahlenröhren auf die Umgebung eines Ding- bzw. Bildstrahls einschrumpfen läßt, erhält man sofort mit

$$n\,D\,df = n'\,D'\,df'$$

die zu beweisende Beziehung (3).

Man beachte den analogen Bau unserer Gleichung (3) mit der bekannten Gleichung von Lagrange

$$\frac{n'}{n} \cdot \beta' \cdot \gamma' = 1$$

für die optische Abbildung zweier zu einem Ding- bzw. Bildstrahl senkrechten Flächenelemente: An Stelle der Längenvergrößerung β' und der Winkelvergrößerung γ' der Lagrangeschen Gleichung tritt in (3) die Drallvergrößerung $\frac{D'}{D}$ und die sphärische Flächenvergrößerung ω'.

Die Normalensysteme, d. h. die von den Normalen einer Fläche gebildeten Strahlensysteme, lassen sich liniengeometrisch durch $q = 0$ (Abb. 1), also nach (2) auch durch die Forderung verschwindenden Dralls $D = 0$ kennzeichnen. Da in (3) sich $D = 0$ und $D' = 0$ gegenseitig bedingen, folgt auch aus (3) sofort der Satz von Malus: Ein Normalensystem bleibt bei jeder optischen Abbildung Normalensystem. Wegen unserer Voraussetzung $q \neq 0$ (Nr. 3b) sind die Fälle $\omega' = 0$ und $\frac{1}{\omega'} = 0$, also insbesondere die Parallelenbündel, von der Betrachtung ausgeschlossen.

Aachen. R. Sauer. 865

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. G. **VOGELPOHL** VDI, Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. Mitteilung aus dem Institut für Techn. Strömungsforschung a. d. Techn. Hochschule Berlin. Leitung: Prof. Dr.-Ing. H. Föttinger VDI (VDI-Forschungsheft 386, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“, Ausgabe B, Bd. 8, Sept./Okt. 1937.) 28 S. m. 38 Abb. u. 6 Zahlentafeln. Berlin 1937, VDI-Verlag, GmbH. Preis 5 M.

Die vorliegende Abhandlung, der ein Schrifttumverzeichnis von 81 Nummern beigegeben ist, stellt eine ungemein sorgfältige kritische Durchmusterung des gegenwärtigen Wissens über die Schmierungsvorgänge im Zapfenlager dar und macht den Leser darüber hinaus mit einer Reihe wertvoller eigener Forschungsergebnisse des Verfassers auf diesem Gebiete bekannt. Die Darstellung gruppiert sich um folgende drei bis dahin noch nicht befriedigend geklärte Einzelfragen, auf deren Aufhellung das Hauptaugenmerk des Verfassers gerichtet ist:

1. Wie wird der Druckverlauf, der nach der hydrodynamischen Theorie für das unendlich lange Zapfenlager weitgehend geklärt ist, durch die endliche Lagerlänge geändert?

2. Welche Bedingungen sind in dem Gebiet anzunehmen, in dem die Rechnung negative Drucke ergibt?

3. Kann die hydrodynamische Theorie dazu beitragen, die Erscheinungen der Mischreibung zu klären?

Die Darlegungen über die erste Fragengruppe beginnen mit einer Aufstellung des Gleichungssystems, das sich bei Berücksichtigung der Erwärmung des Öls und der dadurch veränderlichen Zähigkeit ergibt. In der allgemeinsten Formulierung sind dies die erweiterten Navier-Stokesschen Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Gleichung des Wärmestromes. Auf diese Gleichungen werden die vereinfachenden Annahmen, die bereits O. Reynolds in seiner grundlegenden Arbeit formuliert hat, angewandt und das so entstehende Gleichungssystem diskutiert. Der Verfasser findet, daß mit guter Annäherung die Reynoldssche Gleichung auch bei veränderlicher Zähigkeit verwendbar bleibt, und er gelangt dabei zu einem bemerkenswerten „Minimalsatz der Lagerreibung“, der besagt, daß bei gegebenem Verlauf der Schmierschichtdicke die in Wärme verwandelte Reibungsarbeit ein Minimum wird, falls, wie das meist ja der Fall ist, von dem umgewälzten Öl keine äußere Pumparbeit geleistet wird. Der Minimumsatz ermöglicht nun die Anwendung der bekannten direkten Verfahren der Variationsrechnung auf die Aufgabe. Vogelpohl führt als Beispiel die Rechnung für das vollumschließende endlich lange Lager mit Hilfe eines Reihenansatzes durch, dessen Beiwerte nach dem Ritzschen Verfahren ermittelt werden. Unter der Annahme, daß die Teile des Lagerspaltes, in denen die Rechnung Unterdrücke gibt, in Wirklichkeit unwirksam bleiben, wird der Zu-

sammenhang zwischen der Exzentrizität des Zapfens und den Zapfenkräften vollständig durchgerechnet.

Zur Nachprüfung der Rechnung und zum Studium der zweiten Fragengruppe hat Vogelpohl Versuche an einem Lager mit vollumschließender gläserner Lagerschule gemacht und u. a. die Stromlinien beobachtet, andererseits auch die an Stelle der negativen Drücke zu erwartenden Kavitationsvorgänge beobachten können. Dem physikalischen Verhalten des Öls bei Unterdruck hat er besondere Versuche gewidmet. Es zeigt sich, daß das Öl im gewöhnlichen Zustand erhebliche Gasmengen gelöst enthält, die bei Eintritt von Unterdruck ausgeschieden werden. Der Druck in den beobachteten Kavitationsräumen ist demnach durchaus nicht gleich dem Dampfdruck des Öls, sondern liegt (nach Göttinger Feststellungen) bei genügender Ölzufuhr wesentlich näher dem Atmosphärendruck. In diesem Abschnitt vermißt Ref. allerdings einen Hinweis auf den s. W. zuerst von Stieber angegebenen wichtigen Satz, daß aus Kontinuitätsrücksichten eine Hohlraumbildung im Ölfilm nur an solchen Stellen eintreten kann, wo ohne Hohlraumbildung $\frac{dp}{dx} \geqq 0$ ist, d. h. nur an oder hinter einem Druckminimum.

Die dritte Fragengruppe befaßt sich mit den Abweichungen, die bei hochbelasteten Lagern durch die starke Erwärmung des Öls im Inneren des Lagerspalts infolge der inneren Reibungsarbeit entstehen. Die Ölzähigkeit nimmt mit zunehmender Temperatur bei allen Schmierölen sehr stark ab, wobei zwischen den einzelnen Ölsorten allerdings Unterschiede bestehen. Die Belastbarkeit eines solchen Lagers hängt sehr fühlbar davon ab, wie groß die Zähigkeit am Ende des belasteten Teiles des Lagerspaltes noch ist, und es ist ersichtlich, daß ein Öl mit einem geringeren Abfall der Zähigkeit bei steigender Temperatur sich wertvoller erweist als eines mit einem steilen Abfall. Vogelpohl führt für den rechnerisch besonders einfachen Fall des „ebenen Schmierkeils" die Rechnung unter Berücksichtigung der Erwärmung numerisch durch, wobei für die Zähigkeit der Ansatz gemacht wird

$$\eta = \eta_1 e^{-\beta(\vartheta - \vartheta_1)}$$

(ϑ = Temperatur). Er findet, daß es bei dem Verhalten des jeweiligen Falles wesentlich auf die Größe $\frac{\beta}{\gamma c}$ ankommt (γ = Raumgewicht, c = spezifische Wärme). Er weist darauf hin, daß es sich bei der Messung der Reibungskraft zwischen den zwei aufeinandergepreßten gekreuzten Stahlzylindern der D. Thomaschen Ölprüfmaschine um einen Fall handelt, bei dem die Erwärmung des Öls in der Schmierschicht wesentlich ist. In der Tat zeigt sich, daß die auffälligen Unterschiede, die die verschiedenen Ölsorten gemäß den Voitländerschen Messungen mit dieser Maschine liefern, in eine systematische Ordnung gebracht werden können, wenn man die gemessenen Reibungskräfte nach der Vogelpohlschen Größe $\frac{\beta}{\gamma c}$ ordnet. Diese kann also als ein physikalisches Maß für die bisher nur gefühlsmäßig als „Schmierwert" eingeführte Eigenschaft gelten. Es schließen sich Bemerkungen an über die wirkliche Gestalt von technisch glatten Oberflächen, die immer noch beträchtliche meßbare Unebenheiten enthalten. Für die sogenannte Mischreibung, d. h. den Übergang von dem eigentlichen hydrodynamischen Schmierzustand zu der Coulombschen Reibung, gewinnt man daraus die Vorstellung, daß hier im wesentlichen auch hydrodynamische Reibung des in den Vertiefungen befindlichen Öles herrscht, aber verbunden mit Vorgängen wie bei den aufeinandergepreßten Thomaschen Zylindern, z. T. aber auch mit wirklicher Berührung der Hervorragungen, die nur einen verhältnismäßig sehr kleinen Flächenanteil der Oberflächen ausmachen. Ein Ausblick auf die Versuche, die zur weiteren Klärung des Fragengebietes nötig sind, schließt die Darlegung. L. Prandtl. 870

HANS **BACHMANN**, Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. 8 S. m. 3 Abb. u. 3 Taf. i. Mappe. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 4,80 M.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, den Temperaturverlauf bei der Abkühlung eines Körpers mit innerer Wärmeleitung und Wärmeübergang an eine Umgebung mit konstanter Temperatur für die einfachsten Fälle und die wichtigsten Punkte anzugeben. Dieses sind die unendliche ebene Platte, der unendlich lange Zylinder und die Kugel, wobei diese Körper zunächst auf konstanter Anfangstemperatur gewesen sind. In den drei Tafeln sind für jeden dieser Körper der Temperaturverlauf in der Mitte und am Rande sowie die nach außen abgegebene Wärme in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit dargestellt. Für verschiedene Verhältnisse der Wärmeübergangszahl zur inneren Wärmedurchgangszahl ergeben sich verschiedene zeitliche Verläufe, die dargestellten Kurven sind daher nach diesem Parameter geordnet. Man wird dem Verfasser und dem Verlag dankbar sein, daß die Ergebnisse mit einer ausreichenden Genauigkeit zur Verfügung stehen, so daß man sich in diesen einfachsten Fällen nicht mehr mit Näherungen begnügen muß, wenn man die langwierige Berechnung scheut.

Braunschweig. A. Busemann. 845

Prof. Dr.-Ing. KURT **RAUH**, Dr.-Ing. HERMANN **MARKS**, Dipl.-Ing. WALTER **BÜNDGENS**, Dipl.-Ing. KARL **OTTO**, Kardanbewegung und Koppelbewegung, ein einfaches Verfahren zur Klärung der Bewegungsverhältnisse und zum schnellen und sicheren Entwurf von Koppelkurven-Getrieben. (Praktische Getriebetechnik, Heft 2, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Kurt Rauh, Techn. Hochschule Aachen.) 63 S. m. 93 Abb., 3 Konstruktionstafeln und 1 Genauigkeitstafel. Berlin 1938, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis br. 12 M.

Die Grundlage für die Konstruktion von Koppelgetrieben durch 4 bzw. 5 vorgegebene Lagen bilden die Burmesterschen Sätze, deren Anwendung jedoch sehr zeitraubend ist und deren Ergebnisse zeichnerisch oft nur unsicher erfaßbar sind. Insbesondere werden diese Sätze verwendet für die Ermittlung von Getrieben mit Stillständen während vorgegebener Zeiten. Die Schwierigkeit liegt darin, daß sich die genauen Verfahren nur auf einen bestimmten Zeitpunkt beziehen, während für die hier vorliegenden Aufgaben kinematische Aussagen „im großen" gebraucht werden. Diese Schwierigkeit wird in der vorliegenden Arbeit dadurch überwunden, daß man dem Koppelgetriebe in jedem Augenblicke der Bewegung in einfacher Weise ein Kardankreispaar zuordnet, an dem man alle notwendigen Konstruktionen leicht ausführen kann; hierzu werden übersichtliche Kurventafeln beigegeben. Die auftretenden Möglichkeiten und Ausartungen werden ausführlich untersucht. Zur Überprüfung der Übereinstimmung zwischen den Punktbahnen und ihren Krümmungskreisen ist eine besondere „Genauigkeitstafel" entworfen worden. Mehrere Beispiele sind ausführlich besprochen.

Karlsruhe. Th. Pöschl, VDI. 871

JOSEF **HAILER,** Technischer Reichsbahnoberinspektor, Gleiskrümmung und Fliehkraft auf Eisenbahnbrücken, eine Anleitung zur Berechnung dieser Einflüsse auf die stählernen Eisenbahnbrücken unter Beachtung der Vorschriften der Deutschen Reichsbahn. VI + 49 S. m. 46 Abb. Berlin 1938, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis br. 3,80 M.

Diese Schrift bezweckt, eine einheitliche Grundlage für die praktische Berechnung der Einflüsse, die durch Gleiskrümmung und Fliehkraft auf Eisenbahnbrücken hervorgerufen werden, zu geben, und zwar für alle Fahrbahnglieder (Hauptträger, Querträger, Längsträger und Schwellen). Es werden einfache Formeln entwickelt, durch die der Praktiker die in Frage kommenden Werte auf schnellem Wege ermitteln kann, wobei die neuesten Vorschriften und Bestimmungen berücksichtigt werden.

Karlsruhe. Th. Pöschl, VDI. 871

Dr.-Ing. RUDOLF **KIRCHHOFF,** Die Statik der Bauwerke. 3. Band: Methoden besonderer Art zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme unter besonderer Berücksichtigung der neuzeitlichen hochgradig statisch unbestimmten Bauwerke. — Die Elastizitätstheorie der Gewölbe. Mit 75 z. T. farb. Textabb. 2. Aufl. Berlin 1938, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Preis geh. 18 M, geb. 20 M.

Mit dem dritten Bande liegt nun die zweite Auflage des bekannten Werkes vollständig vor. Wie der Titel sagt, behandelt dieser Band die statisch unbestimmten neueren Bauweisen, wie Rahmenträger in ihren mannigfaltigen offenen und geschlossenen Formen, durchlaufende Rahmen, Stockwerkrahmen u. dgl. Die verwendete Methode ist fast durchwegs die der Arbeitsgleichungen. Den Schluß bildet eine Berechnung der Gewölbe, die für alle Fälle von Eisenbetongewölben brauchbar ist, bei denen die Eiseneinlagen eine volle Einspannung in die Widerlager sicherstellen, sowie auch für Betongewölbe ohne Eiseneinlagen und für Steingewölbe, bei denen in den Kämpferquerschnitten keine Zugspannungen entstehen. — Hervorzuheben ist die große Anschaulichkeit der Darstellung, die dem Werke schon in der ersten Auflage ihren Leserkreis gesichert hat.

Karlsruhe. Th. Pöschl, VDI. 871

A. **BUDNICK,** Dr.-Ing. habil., Zeichnerische Behandlung von Kräften und Momenten in Koppel- und Rädertrieben. VDI-Forschungsheft 388, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 9, Januar/Februar 1938. 22 S. m. 106 Bildern. Berlin 1938, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis geh. 5 M.

Für die Anlage der Momentenpläne von Getrieben wird die Analogie zwischen der von Culmann herrührenden Darstellung der Momente einer ebenen Kräftegruppe durch Strecken im Seileck einerseits und der Drehmomente eines Getriebeglieds, das sich um einen Punkt dreht, andrerseits verwertet. Auf Grund dieser Analogie werden zeichnerische Verfahren entwickelt, die die Größe und Umformung von Kräften und Momenten in Getrieben behandeln und für den Konstrukteur, dem meist nur die Drehzahlen und Leistungen, und damit die Drehmomente vorliegen, wichtig sind. In gewissen Fällen können sie überdies zu einem Überblick über die zu erwartenden Verluste führen. Hervorzuheben sind die Ausführungen über die Ausartung der Momentenpläne in Totlagen und in Parallellagen von Gliedern und die Verwertung der Momentenpläne zur Erfassung der Massenkräfte. Die Ermittlung der Reibungsverluste wird für Zahnrad- und Umlaufrädergetriebe mit Stirn- und Kegelrädern ausgeführt.

Karlsruhe. Th. Pöschl. 832

Dr. R. **FELDTKELLER,** ord. Prof. u. Dir. d. Instituts f. Nachrichtentechnik a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik (Physik und Technik der Gegenwart, Abt. Fernmeldetechnik, herausgegeben von Prof. Dr. Heinrich Faßbender, ord. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Bd. II). IX + 142 S. m. 85 Abb. Leipzig 1937, Verlag S. Hirzel. Preis geb. 10 M.

In der Theorie der elektrischen Stromkreise, besonders in den Anwendungen dieser Theorie in der elektrischen Nachrichtentechnik, hat der Begriff des Vierpols eine zentrale Bedeutung. Es ist schwer zu sagen, wer ihn erdacht hat; er erscheint bereits in der Leitungstheorie bei Heaviside und anderen; seine umfassende Bedeutung haben wohl zuerst F. Breisig und A. E. Kennelly erkannt. Durch die Theorie der Kettenleiter und der zusammengesetzten Übertragungssysteme wurden seine Eigenschaften klar herausgestellt und die allgemeine Aufmerksamkeit auf seinen Nutzen gelenkt. Allmählich hat sich der Vierpol zu einem immer abstrakter gewordenen Begriff entwickelt, der in seiner z. Zt. allgemeinsten Fassung durch eine Matrix von Koeffizienten dargestellt wird.

Bei dieser Sachlage ist eine dem Vierpol und seinen Eigenschaften gewidmete Monographie zu begrüßen. Der Verfasser, dem wir verschiedene neue Sätze über Vierpoleigenschaften verdanken, gibt in dem vorliegenden Buch eine Einführung, die sich zwar in erster Linie an den Anfänger wendet, die aber so Vieles enthält, daß sie auch von dem Kenner und Fachmann gern und mit Vorteil benutzt werden wird.

Die einleitenden Abschnitte bringen die grundlegenden Begriffe: Wellenwiderstände, Übersetzungen, Übertragungsmaße, Scheinwiderstände, Ersatzschaltungen u. dgl. Weitere Kapitel befassen sich mit den symmetrischen Vierpolen ohne Verluste, die als elektrische Siebe wichtig sind, und mit den unsymmetrischen Vierpolen. Dann folgt die allgemeine Theorie der linearen Vierpole mittels der Matrizenrechnung. Hier würde es vielleicht dem Zweck des Buches mehr entsprochen haben und dem Leserkreis besser gedient worden sein, wenn der Verfasser die einfachen Regeln für das Rechnen mit Matrizen nicht nur angegeben, sondern auch kurz begründet hätte, zumal sonst überall die mathematischen Herleitungen und Beweise klar und leicht faßlich durchgeführt sind und dadurch das Buch gerade für den Studierenden und Anfänger im Fach sehr gut geeignet ist. Die drucktechnische Ausstattung ist vorzüglich.

Berlin-Schöneberg. K. W. Wagner. 879

Höhere Mathematik für den Praktiker. An Stelle einer 5. Auflage des Lehrbuches der Differential- und Integralrechnung von H. A. Lorentz, neu bearbeitet von Prof. Dr. G. **JOOS** und Prof. Dr. TH. **KALUZA,** Göttingen. XII + 364 S., Leipzig 1938, J. A. Barth. Preis brosch. 23 M., geb. 24,50 M.

Die erste, holländische Auflage dieses für Physiker, Ingenieure und andere Naturwissenschaftler bestimmten Werkes stammt schon aus dem Jahre 1882. Es war die Absicht seines Verfassers, ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung zusammenzustellen, das die „rein mathematischen Anwendungen in den Hintergrund treten ließ, dagegen zur Erläuterung ausgiebig Gebrauch machte

von den Beispielen aus der Mechanik und Physik". Aber es ist klar, daß man an ein mathematisches Buch eines Physikers nicht denselben Maßstab der mathematischen Schärfe der Begriffsbildung und des logischen Aufbaues legen darf, wie wenn ein Mathematiker dafür verantwortlich zu machen wäre. In der Neubearbeitung hat der Physiker (J) nicht nur die Zahl der physikalischen Fragestellungen vermehrt, sondern es auch für zweckmäßig, vielleicht sogar für nötig erachtet, einen Mathematiker (K) zur Hilfe zu nehmen, der „ganz besonders die Grenzen zu überwachen hatte, die auch bei einem derartigen Buch nicht überschritten werden dürfen". Ein sehr richtiger und einleuchtender Gedanke. Zwei neue kurze Abschnitte über Variationsrechnung und über Funktionen komplexer Veränderlicher sind neu hinzugekommen. Indessen scheint der Besen, mit dem das alte Buch nun ausgekehrt werden sollte, manchmal nicht scharf genug gewesen zu sein. Davon zwei Beispiele. Nachdem dy/dx als „Symbol" für $f'(x)$ erklärt worden ist, erscheinen auf Seite 69 die Differentiale dx und dy selbständig als unendlich kleine Größen, deren Quotient einen bestimmten Grenzwert hat, ohne daß jedoch dx und dy selbst irgendwie erklärt wären. Mir will aber scheinen, daß in einem auch für Physiker usw. bestimmten Lehrbuch der Höheren Mathematik, wo fast überall von Differentialen Gebrauch gemacht wird, doch wohl irgendwo gesagt sein muß, was diese bedeuten. Oder ist die Differentialrechnung (d. i. die Rechnung mit Differentialen) eine Zauberei? Ein zweites Beispiel für die mangelnde Kritik ist der Satz

$$\partial^2 \varphi / \partial x \, \partial y = \partial^2 \varphi / \partial y \, \partial x .$$

Angeblich (Nr. 2742) wird er bewiesen. Aber gezeigt wird nur die Gleichheit der mittleren partiellen Differenzenquotienten, was eine fast selbstverständliche Tatsache ist, und wofür nicht erst eine ganze Druckseite nötig gewesen wäre. Der Hauptwitz des Beweises ist dagegen weggelassen; was aber insofern ganz gut war, als auch die Voraussetzungen jenes Satzes nirgends angegeben sind. Ist das nun hier die „naive Sicherheit" der Verfasser, von der sie in der Vorrede behaupten, daß sie ihnen von mathematischer Seite verübelt wird? Wäre es nicht besser und auch einfacher gewesen, den Lesern dieses Buches den Satz nur an ein paar Beispielen klarzumachen; denn im Grunde genommen geht er keinen Physiker etwas an.

Auf andere Mängel dieser Art will ich der Kürze wegen hier nicht eingehen, um so weniger, als den neuen Bearbeitern auch nicht viel daran gelegen zu sein scheint, sie kennenzulernen und zu verbessern. Denn man kann in der Vorrede folgendes lesen: „Wo eine mathematische Unsauberkeit aufgezeigt wird, bitten wir erst zu überlegen, ob dadurch eine fehlerhafte Benützung für die Praxis bewirkt werden kann; ist überhaupt je einmal die Entwicklung der Physik und Technik durch leichtsinnige Verwendung der Mathematik auf falsche Wege geraten? Wohl aber sind uns Fälle bekannt, wo die mathematischen Skrupel den Praktiker davon abgehalten haben, eine an sich mögliche grobe Näherungslösung rechnerisch zu suchen." Mir sind dagegen Fälle wie der folgende bekannt geworden, wo ein Bauingenieur wochenlange Biegungsversuche nicht in Einklang mit der Theorie bringen konnte, und der Verzweiflung nahe kam, bis sich herausstellte, daß er eine zwar richtige und ihm geläufige, aber in diesem Falle nicht zulässige Näherungsformel benutzt hatte, während die genaue Theorie zum Ziele führte. Ich finde daher, daß die in den vorhergehenden Sätzen ziemlich schroff ausgesprochenen Prinzipien nicht ganz begründet sind, und außerdem soll in der Wissenschaft Wahrheit und Sauberkeit das Ziel sein. In der alten Vorrede von H. A. Lorentz stehen jedenfalls solche Sätze nicht zu lesen.

Wenn die Göttinger Studenten eine auf solchen Prinzipien aufgebaute Vorlesung als „Idiotenkolleg" bezeichnen, wie die Verfasser es in der Vorrede mitteilen, so sind diese zwar im Recht, wenn sie meinen, für solche Scherze seien die Zeiten zu ernst. Aber steckt nicht auch in der burschikosen Äußerung eine tiefere und ernsthafte Bedeutung? Studenten haben zu allen Zeiten ein feines Gefühl für eine saubere und ehrliche Vorlesung gehabt.

Selbstverständlich ist auch die beste reinmathematische Vorlesung über Differential- und Integralrechnung für den Physiker und Ingenieur nicht geeignet. Aber es geht doch auch anders als mit der mathematischen Unsauberkeit, die die Verfasser dieses Buches zulassen wollen, solange sie nur keinen Schaden anrichtet. Hier scheiden sich die Geister.

Natürlich kann ein kritischer Leser aus dem Buche, insbesondere aus den Aufgaben, allerlei und auch allerlei Gutes lernen. R. Rothe. 859

Dr. RUDOLF **ROTHE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Differentialgeometrie, I. Raumkurven und Anfänge der Flächentheorie (Sammlung Göschen Nr. 1113). 132 S. m. 32 Abb. Berlin und Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Der überwiegende Teil des vorliegenden ersten Bandes der Rotheschen Differentialgeometrie ist der Theorie der Raumkurven gewidmet, die hier in nicht alltäglicher Ausführlichkeit behandelt werden. Die eingehende Untersuchung der Differentialinvarianten (§ 6) möge besonders erwähnt werden, ebenso der Abschnitt über die Bestimmung einer Kurve aus ihren natürlichen Gleichungen (§ 7), wobei es allerdings nicht ganz verständlich ist, weshalb der Verfasser von der üblichen Darstellung abweichend die Kurve durch Windung und Krümmungs*quadrat* kennzeichnet (anstatt durch die Krümmung selbst!). Durch die Einführung des Begriffes der Schmiegungsfläche einer Raumkurve — das ist *die* Fläche einer $(n+1)$-parametrigen Schar, die die Kurve in einem bestimmten Punkt von n-ter Ordnung berührt —, können Schmiegungsebene und Schmiegungskugel in einen weiteren geometrisch wichtigen Zusammenhang eingeordnet werden (§ 8). Mit besonderer Liebe hat der Verfasser endlich die Minimalkurven (§ 9) behandelt. Auf die Kurventheorie folgen die Anfangsgründe der Flächentheorie: Analytische Darstellung einer Fläche, Berührungsebene und Linienelement, Krümmungstheorie, Bemerkungen über die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander.

Die Darstellung ist kurz und bündig, wie es die Leser der „Höheren Mathematik" von Rothe gewohnt sind, von den Abbildungen ist die Unglücksnummer 13 nicht ganz wohlgeraten.

Freiberg (Sa.). G. Grüß. 875

Dr. KARL **MENNINGER,** Rechenkniffe. Lustiges und vorteilhaftes Rechnen. Ein Lehr- und Handbuch für das tägliche Rechnen. 4., ergänzte Aufl. 96 S. Breslau 1938, Verlag Ferdinand Hirt. Preis geb. 2,50 M.

Der Verfasser gibt in den „Rechenkniffen" eine lebendige und volkstümliche Schilderung bekannter Rechenmethoden: Neuner- und Elferprobe, Vorteile beim Rechnen mit den vier Grundrechnungsarten u. a. m. Das Kapitel über die sog. Hundertrechnung (Prozentrechnung) steht nur in losem Zusammenhange mit dem übrigen Inhalte des Buches und berichtet in sachlicher und methodischer Hin-

sicht nichts Neues. — Die Abfassung des Buches ist geschickt und sehr ansprechend, so daß es allen, die sich für diese Fragen interessieren, empfohlen werden kann.

Meerane (Sa.). Kneschke. 813

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. ALBRECHT **HUSSMANN,** Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese mit Schablonen für eine Rechnung mit 12, 24, 36 oder 72 Ordinaten. 28 S. mit 24 Abb. im Text und auf 2 Tafeln, 4 Zahlentafeln sowie 10 Berechnungstafeln. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis geh. 9,60 M.

Dr. phil. WILHELM **SPÄTH** VDI, Physik der mechanischen Werkstoffprüfung. VI + 179 S. m. 84 Abb. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis geb. 14,60 M.

Dr.-Ing. HELLMUT **HOMBERG,** Graphische Untersuchung von Fangedämmen und Ankerwänden unter Berücksichtigung starrer Wände. (Mitteilungen aus dem Gebiete des Wasserbaues und der Baugrundforschung, Heft 8.) V + 42 S. m. 41 Abb. Berlin 1938, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 5,60 M.

Dr. EUGEN **JAHNKE,** weil. Prof. a. d. Bergakademie Berlin, Dr.-Ing. e. h., Dr. techn. e. h. FRITZ **EMDE,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. (3. neubearb. Aufl.) XII + 305 S. m. 181 Textfig. Leipzig und Berlin 1938, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 15 M.

Grimsehls Lehrbuch der Physik, neubearb. von Prof. Dr. R. **TOMASCHEK,** Direktor d. Physik. Instituts d. Techn. Hochschule Dresden, II. Bd., 1. Teil, Elektromagnetisches Feld Optik. 8. Aufl. X + 866 S. m. 1209 Abb. Leipzig und Berlin 1938, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 26 M.

Dr.-Ing. habil. HORST **TEICHMANN,** Dozent f. Physik a. d. Techn. Hochsch. Dresden, Vektoralgebra und ihre Anwendungen, mit einem Überblick über die Vektoranalysis. VIII + 93 S., Frankfurt a. M. 1938, Verlag Moritz Diesterweg. Preis 3,80 M.

HANS **JÖNCK,** Oberlehrer a. d. Marinefachschule für Technik, Kiel, Mechanik und Festigkeitslehre (Kraftbetriebstechnische Bücherei, herausgegeben von Oberfachschulrat E. Haarmann und Oberregierungsrat Dipl.-Ing. H. Kohrs, Kiel). 280 S. m. 322 Abb. Berlin 1938, Verlag der Deutschen Arbeitsfront G. m. b. H. Preis geb. 5,60 M.

Dipl.-Ing. SIEGFRIED **GROSS** VDI, Obering. d. Friedr. Krupp A.-G. Essen, u. Dr.-Ing. habil. ERNST **LEHR** VDI, Leiter d. Abt. Maschinenbau im Staatl. Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem, Die Federn, ihre Gestaltung und Berechnung (herausgg. v. d. Fachausschuß f. Federn beim Verein deutscher Ingenieure v. Prof. Dipl.-Ing. Paul Speer, VDI, WVV, Reichsbahnoberrat). 136 S. m. 215 Abb. Berlin 1938, VDI-Verlag. Preis geb. 25 M.

NACHRICHTEN

E. Papperitz †.

Am 5. August verstarb in Bad Kissingen der ehemalige Professor der Mathematik und Darstellenden Geometrie an der Bergakademie Freiberg (Sa.), Geh. Bergrat Dr. Erwin Papperitz im Alter von 81 Jahren. Papperitz, der einer Dresdener Künstlerfamilie entstammte, studierte zunächst in München Naturwissenschaften, wandte sich dann aber in Leipzig unter dem Einfluß von Felix Klein der Mathematik zu. Vor allem beschäftigten ihn anschauliche Probleme der Geometrie, während er z. B. die rein rechnerischen Methoden der neueren Physik, insbesondere die Relativitätstheorie, ablehnte. Weiten Kreisen war er durch sein gemeinsam mit K. Rohn 1893/96 in erster Auflage in zwei, später in drei Bänden herausgegebenes „Lehrbuch der Darstellenden Geometrie“ und durch seine zahlreichen „Mathematischen Modelle“ bekannt. Allen, die ihn näher kannten, wird der liebenswürdige, humorvolle Mensch unvergessen bleiben.

R. Rothe zum 65. Geburtstag.

Am 15. Oktober 1873 wurde Rudolf Rothe als echtes Berliner Kind geboren. — Familie Rothe stammt aus Schlesien. Nachdem er an der Berliner Universität als Schüler von J. Knoblauch, H. A. Schwarz und L. Fuchs studiert und im Jahre 1897 promoviert hatte, war Rothe als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter und später als etatsmäßiger Mitarbeiter an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt tätig; von dieser Zeit, in der er „erst richtig Physik lernte“, erzählt Rothe noch heute gern. 1905 habilitierte sich Rothe an der Technischen Hochschule Charlottenburg, nachdem er dort schon vorher als Assistent von Lampe in den Übungen mitgeholfen hatte. 1908 wurde Rothe als Ordinarius an die Bergakademie Clausthal berufen, sechs Jahre später an die Technische Hochschule Hannover, und 1915 kehrte er in seine Heimatstadt und an die Technische Hochschule Charlottenburg zurück. Für seine Lehrtätigkeit gelten die Goetheschen Verse:

> Wer sich behaglich mitzuteilen weiß,
> Den wird des Volkes Laune nicht erbittern;
> Er wünscht sich einen großen Kreis,
> Um ihn gewisser zu erschüttern.

Der „große Kreis“ von Tausenden von Ingenieuren, die Rothe ihr mathematisches Rüstzeug verdanken, kann es bestätigen, daß er die schwierigsten Dinge „behaglich mitzuteilen weiß“, und daß ihn die Laune des Volkes seiner Zuhörer niemals erbitterte — hat doch Rothe wie nur wenige Hochschullehrer Verständnis für seine Studenten und menschlichen Kontakt mit vielen von ihnen. Sein Unterrichtstalent kommt außer den Ingenieurstudenten besonders den zünftigen Mathematikern von der Technischen Hochschule und Universität und den technischen Physikern zugute; darüberhinaus auch denen, die schon im Beruf stehen: Im Telegraphentechnischen Reichsamt und im Außeninstitut der Technischen Hochschule hält Rothe Vorträge für Telegrapheningenieure und andere Praktiker, und in einem schulmathematischen Kolloquium arbeitet er gemeinsam mit den Lehrern der höheren Schulen daran, die Beziehungen zwischen Schule und Hochschule enger und fruchtbarer zu gestalten. Ebenso vielseitig wie seine Unterrichtstätigkeit ist auch Rothes wissenschaftliche Arbeit: Differentialgeometrie, reelle Funktionen, praktische Analysis, Ballistik und Schulmathematik — diesen sehr verschie-

denen Gebieten gehören seine zahlreichen Veröffentlichungen an. Die Rotheschen Lehrbücher sind bei Mathematikern und Ingenieuren so beliebt und bekannt, daß hier nicht an sie erinnert zu werden braucht; es sei nur noch erwähnt, daß Rothe den sechsten und siebenten Band der Werke Karl Weierstraß' (Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Funktionen, Vorlesungen über Variationsrechnung) herausgegeben und den mathematischen Teil der „Hütte" bearbeitet hat.

Zum 65. Geburtstag wünschen wir Rudolf Rothe, dem unermüdlichen, frohsinnigen, aufrechten Mann, daß ihm noch lange Jahre in Gesundheit und Schaffensfreude gegönnt seien!

Freiberg (Sa.) G. Grüß. 887

14. Deutscher Physiker- und Mathematikertag.

In der Zeit vom 11. bis 16. September 1938 fand in Baden-Baden der diesjährige deutsche Physiker- und Mathematikertag statt, auf dem dieses Mal auch eine Reihe ausländischer Forscher Vorträge aus ihrem Arbeitsgebiet hielten. Der Vormittag des letzten Tages war der Angewandten Mathematik und Mechanik gewidmet. An diesem Vormittag wurden die folgenden Vorträge gehalten:

K. Mahruhn, Berlin: Über ein Existenzproblem der Hydromechanik.

A. Klose, Berlin: Maßfunktionen des Vektors und des Tensors.

H. Cremer, Köln: Über die statistischen Voraussetzungen der Nachhallgesetze.

H. Roßbach, Karlsruhe: Zum Torsionsproblem des gekerbten Kreisquerschnittes.

A. Huber, Fribourg: Eine Näherungsmethode zur Lösung der Integralgleichung des Bolometerproblemes.

F. Burkhardt, Leipzig: Gleichgewichtsprobleme in Versicherung, Verwaltung und Wirtschaft.

L. Viëtoris, Innsbruck: Die Schleppe als Planimeter.

W. Cauer, Berlin: Tschebyscheffsche Approximationen in der Elektrotechnik.

Am Freitagnachmittag wurde in einer Sitzung des Mathematischen Reichsverbandes ein Plan für die dreijährige Ausbildung der Lehrer der reinen und angewandten Mathematik besprochen und die weitere Ausbildung der Mathematiker und mathematischen Physiker, die für die Technik arbeiten wollen, erörtert.

Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Göttingen.

Programm der Tagung.

Donnerstag, den 20. Oktober 1938:

Referat über hydrodynamische Vorträge des internationalen Mechanikkongresses in Cambridge (U. S. A.)

Vorträge: Reichardt, Göttingen: Über das Messen turbulenter Schwankungen.

Motzfeld, Göttingen: Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen.

Schultz-Grunow, Göttingen: Zur Berechnung der turbulenten Ablösung.

Heinrich, Breslau: Vorführung von drei Unterrichtsfilmen über konforme Abbildungen.

Freitag, den 21. Oktober 1938:

Referat über aerodynamische Vorträge des internationalen Mechanikkongresses in Cambridge (U. S. A.)

Vorträge: Betz, Göttingen: Zur Theorie der Leitapparate für Propeller.

Hansen, Göttingen: Windkanalmessungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Fläche.

Ferner wird Collatz, Karlsruhe, einen zusammenfassenden Bericht über Methoden zur genäherten Bestimmung von Eigenwerten geben.

Am Nachmittag finden Besichtigungen statt.

Sonnabend, den 22. Oktober 1938:

Referat über Vorträge des internationalen Mechanikkongresses in Cambridge (U. S. A.) über Elastizitätslehre, Schwingungsprobleme usw.

Vorträge: Weber, Dresden: Minimalsätze der Elastizitätslehre und ihre Anwendung zur Berechnung von Verschiebungen.

Schilhansl, Heidenheim: Beitrag zur Berechnung der Biegeschwingungen von mehrfach abgesetzten und mehrfach gelagerten Wellen.

Ludwig, Hannover: Knickfestigkeit eines ebenen Systemes beliebig vieler Stäbe, die in einem Knotenpunkte zusammenstoßen.

Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring.

Der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt E. V. Braunschweig ist vom Reichsminister für Luftfahrt und Oberbefehlshaber der Luftwaffe Generalfeldmarschall Hermann Göring die Erlaubnis erteilt worden, in Zukunft den Namen „Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring" zu führen.

Büro für wissenschaftliche Rechnungen.

Dr. L. J. Comrie, der früher Superintendent des Nautical Almanac Office war, hat 1937 in London ein Büro für wissenschaftliche Rechnungen eröffnet, zunächst als sein persönliches Unternehmen. Er erhielt bald reichlich Aufträge. Daraufhin wurde das Unternehmen 1938 in eine G.m.b.H. mit 16 Mitarbeitern umgewandelt, von denen die meisten eine akademische Ausbildung haben. (Scientific Computing Service Limited, 23 Bedford Square, London, W. C. 1.) Die Gesellschaft übernimmt folgende Arbeiten: Wissenschaftliche Berechnungen, insbesondere massenhafte, Berechnung von Tafeln, statistische Arbeiten, Bearbeitung von Fragebogen, Fouriersche Analysen, Vermessungsrechnungen, numerische Integration von Differentialgleichungen, Beratung beim Kauf von Rechenmaschinen, Unterrichtskurse im mechanischen, insbesondere im Maschinenrechnen usw. Die Gesellschaft besitzt vielerlei Rechenmaschinen, darunter auch Buchungsmaschinen und Lochkartenmaschinen, und eine umfassende Fachbücherei.

Würde in Deutschland ein solches Unternehmen ausreichend Beschäftigung finden?

F. Emde. 883

Normung der Winkeleinheiten und Winkelteilungen.

Das beim Beuth-Vertrieb, Berlin SW 68, erschienene Normblatt Din 1315 unterscheidet folgende Winkeleinheiten: Altgrad (90. Teil des rechten Winkels), Neugrad (100. Teil des rechten Winkels), Radiant und Rechter Winkel.

Persönliches.

Der ord. Professor der Geodäsie an der Techn. Hochschule Dresden, Dr. P. Werkmeister, trat in den Ruhestand.

Im Juli verstarb der ord. Professor für Physik an der Techn. Hochschule Breslau, Dr. E. Waetzmann. 884

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

A. Bezugsbedingungen:

Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt $^{1}/_{2}$jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **13.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

VDI-Literaturkartei: Auf Wunsch erhalten unsere Bezieher unberechnet Karteikarten über den Inhalt sämtlicher Zeitschriften des VDI in monatlichen Zusammenstellungen gegen Erstattung der jährlichen Versandkosten von 1.— RM.

ZUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise

Satzspiegel der $^{1}/_{1}$ Seite 171/250 mm.
$^{1}/_{1}$ Seite 160.— RM, $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{16}$ Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102373, Wien 174439, Prag 77329, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin C 2, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8 bis 17 Uhr, Sonnabend 8 bis 12^{30} Uhr.